Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 2001 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1 – 2001» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1756» или «Ф1763». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1761 – М1763 предлагались на XLI Международной математической олимпиаде.

Задачи Ф1764 – Ф1766 и Ф1768 – Ф1771 предлагались на заочном туре Соросовской олимпиады по физике.

Задачи М1756—М1765, Ф1763 — Ф1772

М1756. Даны несколько различных натуральных чисел. Известно, что среди любых трех из них можно выбрать два так, чтобы одно делилось на другое. Докажите, что все числа можно покрасить в два цвета так, чтобы для любых двух чисел одинакового цвета одно делилось на другое.

Е.Черепанов

М1757*. Выпуклый многоугольник можно разрезать на 20 параллелограммов. Докажите, что этот многоугольник можно разрезать на 15 параллелограммов.

В.Произволов

М1758. Всякий депутат имеет свой (абсолютный) рейтинг. В начальный момент после избрания каждый депутат вошел в одну из фракций, в которой он может подсчитать свой относительный рейтинг. Возможен переход депутата из одной фракции в другую, если его относительный рейтинг при этом увеличивается. Пусть в каждый момент времени может происходить лишь один такой переход. Докажите, что спустя конечное время все рейтинговые переходы прекратятся.

В.Ильичев

М1759. Имеется остроугольный треугольник с меньшей стороной c и противолежащим ей углом γ. Известно, что треугольник можно раскрасить в два цвета так, что расстояние между любыми двумя точками одного цвета будет не больше c. Докажите, что $\gamma \geq 36°$.

А.Эвнин

<u>ПОПРАВКА.</u> В условии задачи М1754 (см. «Квант» №6 за 2000 г.) допущена опечатка. В 5-й строке текста задачи слово «черных» следует заменить словом «четных».

М1760. Таблицу размером $n\times n$ клеток назовем удивительной, если она обладает следующим свойством: всякие n чисел таблицы такие, что в каждом столбце таблицы и в каждой строке таблицы присутствует ровно одно из них, дают одну и ту же сумму. Докажите, что каждая удивительная таблица может быть представлена в виде суммы двух таблиц, у одной из которых в каждом столбце все числа равны, а у другой – в каждой строке все числа равны.

Например, $\begin{pmatrix} 3, 4, 1 \\ 6, 7, 4 \\ 5, 6, 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2, 3, 0 \\ 2, 3, 0 \\ 2, 3, 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1, 1, 1 \\ 4, 4, 4 \\ 3, 3, 3 \end{pmatrix}$.

В.Произволов

М1761. У фокусника 100 карточек, занумерованных числами от 1 до 100. Он раскладывает все карточки в три ящика – красный, белый и синий – так, чтобы в каждом ящике лежала хотя бы одна карточка.

Один из зрителей выбирает два из трех ящиков, вынимает из них по одной карточке и объявляет сумму номеров вынутых карточек. Зная эту сумму, фокусник определяет тот ящик, из которого карточки не вынимались.

Сколькими различными способами можно разложить карточки по ящикам так, чтобы этот фокус всегда удавался?

(Способы, при которых хотя бы одна карточка попадает в разные ящики, считаются различными.)

(Венгрия)

М1762. Существует ли натуральное число n такое, что n имеет ровно 2000 различных простых делителей и $2^n + 1$ делится на n?

В.Сендеров

М1763*. Пусть AH_1, BH_2, CH_3 – высоты остроугольного треугольника ABC. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках T_1, T_2, T_3 соответственно. Прямые l_1, l_2, l_3 являются образами прямых H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 при симметрии относительно прямых T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2 соответственно.
Докажите, что прямые l_1, l_2, l_3 образуют треугольник с вершинами на окружности, вписанной в треугольник ABC.

Т.Емельянова

М1764. Пусть функция $f:[0;1] \to \boldsymbol{R}$ удовлетворяет следующим условиям: $f(0)=0$, $f(1)>0$, f монотонно возрастает на $[0;1]$ и для любых x_1, $x_2 \in [0;1]$, для которых $x_1+x_2 \in [0;1]$, выполняется неравенство

$$f(x_1)+f(x_2) \ge f(x_1+x_2).$$

Докажите, что тогда последовательность чисел

$$s_n = f(1)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+\ldots+f\left(\frac{1}{n}\right),\ n=1,2,3,\ldots,$$

не ограничена.

В.Попов

М1765. Длина ребра правильного тетраэдра равна 1.
а) На ребрах тетраэдра отмечены 5 точек.
б) На поверхности тетраэдра отмечены 9 точек.
в*) В тетраэдре отмечены 9 точек.
Докажите, что в каждом случае найдутся две отмеченные точки, расстояние между которыми не превосходит 0,5.

В.Произволов

Ф1763. При компьютерном моделировании создан мир, в котором скорость звука $c_1 = 3$ м/с, а скорость света $c_2 = 8$ м/с. Маленький автомобиль едет со скоростью $v_0 = 5$ м/с вдоль прямой, наблюдатель находится на расстоянии $L = 20$ м от этой прямой. В каком месте он видит автомобиль в тот момент, когда звук мотора слышен из ближайшей к наблюдателю точки прямой? (Считайте, что наблюдатель способен верно определить направление на источник приходящего звука.)

З.Рафаилов

Ф1764. Найдите ускорение тележки, на которой находятся два груза (рис.1). Стол гладкий, коэффициент трения между тележкой и грузами μ.

Р.Александров

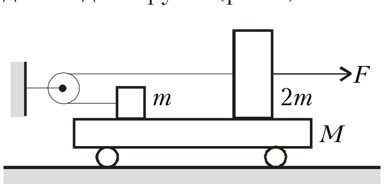

Рис.1

Ф1765. Пучок протонов направляется в камеру Вильсона. На одной из фотографий (цепочек капелек пара) зафиксирована картинка, на которой три отрезка прямых выходят из одной точки, отрезки составляют между собой углы 90°, 120° и 150°. Картинка соответствует акту упругого столкновения протона с одним из неподвижных ядер. Установите по фотографии, что это может быть за ядро.

С.Варламов

Ф1766. Из четырех одинаковых гладких легких стержней длиной L каждый, скрепленных концами шарнирно, сделан ромб (рис.2). Один из шарниров (верхний) закреплен, однородный цилиндр, помещенный внутрь ромба, находится в равновесии, верхние два стержня составляют при этом угол 2α. Найдите по этим данным диаметр цилиндра.

А.Зильберман

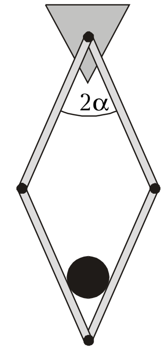

Рис.2

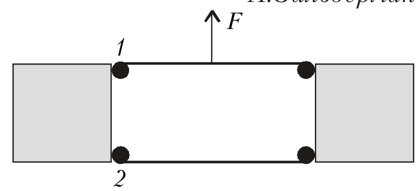

Рис.3

Ф1767. Два одинаковых кубика с помощью шарниров соединены двумя невесомыми и абсолютно твердыми стержнями (рис.3). К середине одного из стержней перпендикулярно ему приложена сила $\vec{F}$. С какими силами действуют стержни на кубик в местах прикрепления шарниров *1* и *2*? Тот же вопрос для случая, когда стержни имеют такую же массу, как и кубики.

С.Варламов

Ф1768. Длинный стержень с площадью поперечного сечения $S = 1$ мм^2 сделан из материала с модулем Юнга $E = 2\cdot10^{11}$ Н/м^2. На один из торцов начинает действовать вдоль стержня сила $F = 1$ Н, равномерно распределенная по площади торца. Найдите смещение этого торца за время $t = 0{,}1$ с (считайте, что упругая волна за это время не достигла другого конца стержня). Скорость звука в стержне $v_{зв} = 5000$ м/с.

А.Стержнев

Ф1769. В сосуде находится воздух и некоторое количество воды при температуре +100 °С. Объем сосуда медленно увеличивают при неизменной температуре и измеряют давление внутри с точностью примерно 0,5%. Результаты измерений приведены в таблице:

объем, см^3	20	25	30	35	40	45
давление, кПа	140	132	126,5	108,5	95	84,5

Какое количество воды сконденсируется, если, не изменяя окончательного объема сосуда, понизить температуру до +20 °С?

А.Паров

Ф1770. Собрана схема, состоящая из идеальной батарейки напряжением 3,3 В, двух одинаковых амперметров, двух одинаковых вольтметров и «черного ящика» с четырьмя выводами (рис.4). Показания амперметров 10 мА и 12 мА, показания вольтметров 3,6 В и 3 В. Нарисуйте возможную схему, находящуюся внутри «черного ящика» (постарайтесь придумать попроще!).

Р.Простов

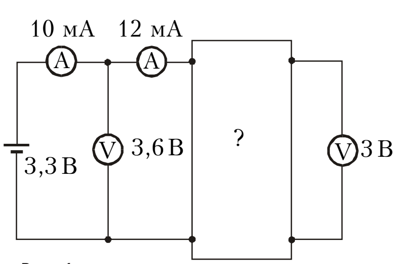

Рис.4

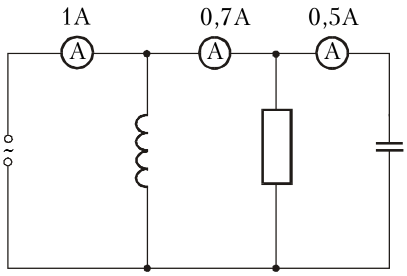

Рис.5

Ф1771. К источнику переменного напряжения подключены катушка, резистор и конденсатор, в цепь включены три амперметра переменного тока, показания которых 1 А, 0,7 А и 0,5 А (рис.5). Как изменятся показания приборов после отключения резистора? Элементы цепи считать идеальными.

Р.Старов

Ф1772. Точечный источник света освещает экран. Вплотную к источнику подносят прозрачную полусферу из стекла с показателем преломления $n = 1{,}6$, плоская часть которой параллельна плоскости экрана, при этом источник «попадает» в центр круга. Во сколько раз нужно изменить излучаемую мощность источника, чтобы освещенность в центре экрана осталась такой же, как и без полусферы?

А.Светлов