Законы сохранения в задачах на столкновения

А.ОВЧИННИКОВ, В.ПЛИС

В физике под столкновениями понимают процессы кратковременного взаимодействия между телами в широком смысле слова, а не только как соприкосновение тел. Сталкивающиеся тела на большом расстоянии являются свободными. Проходя друг мимо друга, тела взаимодействуют между собой, в результате могут происходить различные процессы – соединение тел, возникновение новых тел и т.п. Наконец, может иметь место *упругое* столкновение, при котором тела после некоторого сближения вновь расходятся без изменения своего внутреннего состояния. Столкновения, приводящие к изменению внутреннего состояния тел, называются *неупругими*.

Происходящие в обычных условиях столкновения обычных тел почти всегда бывают в той или иной степени неупругими – уже хотя бы потому, что они сопровождаются некоторым нагреванием тел, т.е. переходом части их кинетической энергии в тепло. Тем не менее, в физике понятие об упругих столкновениях играет важную роль. В частности, с такими столкновениями приходится иметь дело в физическом эксперименте в области атомных явлений.

Обсудим несколько конкретных задач.

Задача 1. *Протон, пролетая мимо первоначально покоившегося ядра неизвестного химического элемента, отклонился на угол* $\beta = \arccos(4/15)$, *а величина скорости протона уменьшилась на 10% (рис.1). Найдите массовое число химического элемента.*

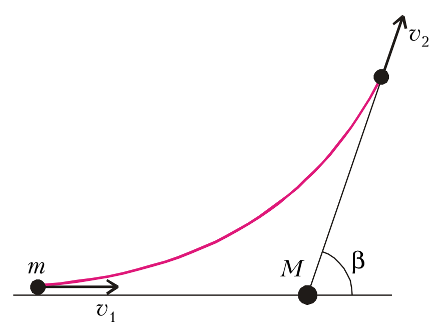

Рис. 1

Взаимодействие частиц упругое; следовательно, импульс и энергия системы сохраняются:

$$m\vec{v}_1 = m\vec{v}_2 + M\vec{v},$$

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{Mv^2}{2},$$

где m, v_1 и v_2 – масса и скорости протона, M и v – масса и скорость неизвестного ядра. Из закона сохранения импульса с помощью теоремы косинусов получаем

$$(Mv)^2 = (mv_1)^2 + (mv_2)^2 - 2m^2 v_1 v_2 \cos\beta.$$

Из двух последних соотношений получаем искомое массовое число:

$$A = \frac{M}{m} = \frac{1 + k^2 - 2k\cos\beta}{1 - k^2} = 7,$$

$$\text{где } k = \frac{v_2}{v_1} = 0{,}9.$$

Следовательно, протон столкнулся с ядром лития.

Задача 2. *Каков максимальный угол θ упругого рассеяния α-частицы в водороде? Масса атома водорода в 4 раза меньше массы α-частицы.*

Первый способ решения. Проанализируем упругое столкновение в лабораторной (неподвижной) системе отсчета. Введем обозначения: m_1 – масса α-частицы, $\vec{v}$ – ее скорость до рассеяния, m_2 – масса атома водорода, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ – скорости α-частицы и атома водорода, соответственно, после рассеяния.

Взаимодействие упругое; следовательно, сохраняются импульс (рис. 2)

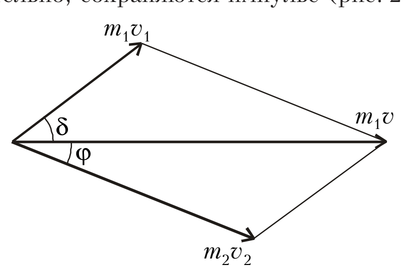

Рис. 2

и кинетическая энергия системы α-частица – атом водорода:

$$m_1v = m_1v_1\cos\delta + m_2v_2\cos\varphi,$$

$$m_1v_1\sin\delta = m_2v_2\sin\varphi,$$

$$\frac{m_1v^2}{2} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}.$$

Исключив из этих соотношений угол φ и скорость v_2, получим относительно v_1 квадратное уравнение

$$(m_1 + m_2)v_1^2 - 2m_1v\cos\delta \cdot v_1 + (m_1 - m_2)v^2 = 0.$$

Корни этого уравнения будут вещественными при $\sin\delta \le m_2/m_1$. Максимальный угол δ, удовлетворяющий этому условию, и есть искомый угол θ. Таким образом,

$$\theta = \arcsin\frac{m_2}{m_1} \approx 0{,}25 \text{ рад}.$$

Заметим, что рассеяние на максимальный угол возможно только при условии, что масса налетающей частицы больше массы покоящейся.

Второй способ решения. В общем случае столкновение удобно рассматривать в системе центра масс сталкивающихся частиц (в системе, где их суммарный импульс равен нулю). Скорость центра масс нашей системы тел равна

$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{v}}{m_1 + m_2}.$$

До столкновения импульс частицы массой m_1 равен

$$\vec{p} = m_1\left(\vec{v} - \vec{V}\right) = \frac{m_1m_2\vec{v}}{m_1 + m_2},$$

а импульс частицы массой m_2 равен $-\vec{p}$.

При упругом столкновении импульс и энергия взаимодействующей системы тел сохраняются. Так что если импульс первой частицы после столкновения обозначить $\vec{p}_{\&}$, то импульс второй будет $-\vec{p}_{\&}$. Из закона сохранения энергии, записанном в виде

$$p^2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = p_{\&}^2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right),$$

находим

$$p = p_{\&}.$$

Таким образом, единственное, что происходит в рассматриваемой системе при столкновении, это поворот импульсов частиц, т.е. изменение их направления без изменения величины. Вместе с импульсами так же изменяются и скорости обеих частиц. Угол поворота зависит от конкретного характера взаимодействия частиц и от их взаимного расположения при столкновении.

При переходе в лабораторную систему отсчета воспользуемся правилом сложения скоростей. В соответствии с ним, скорость налетающей частицы после столкновения равна

$$\vec{v}_1 = \vec{V} + \vec{v}_{1\&},$$

где $\vec{v}_{1\&}$ – ее скорость в системе центра масс. На рисунке 3 из одной точки

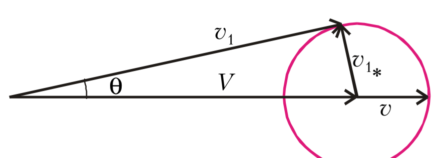

Рис. 3

отложены векторы $\vec{V}$ – скорость центра масс системы и $\vec{v}$ – скорость налетающей частицы до столкновения.

Величина

$$v_{1\&} = \frac{m_2v}{m_1 + m_2}$$

определяет радиус окружности, на которой заканчивается вектор $\vec{v}_1$. Из рисунка следует, что в случае $m_1 > m_2$ угол между векторами скоростей $\vec{v}$ и $\vec{v}_1$ налетающей частицы до и после столкновения не может превышать некоторого максимального значения θ, соответствующего случаю, когда $\vec{v}_1$ касается окружности, т.е.

$$\theta = \arcsin\frac{v_{1\&}}{V} = \frac{m_2}{m_1} \approx 0{,}25 \text{ рад}.$$

Задача 3. *Первая искусственная ядерная реакция*

$${}^{14}\mathrm{N} + {}^{4}\mathrm{He} = {}^{17}\mathrm{O} + p$$

наблюдалась Резерфордом в 1919 году. Она идет с поглощением энергии Q = = 1,13 МэВ. Какую минимальную кинетическую энергию $E_{пор}$ следует сообщить в лабораторной системе отсчета α-частице, чтобы при бомбардировке неподвижной мишени из азота указанная реакция могла произойти?

Пороговой энергией $E_{\text{пор}}$, или порогом ядерной реакции, называют такую энергию налетающей на неподвижную мишень частицы, начиная с которой ядерная реакция становится возможной.

Сначала – небольшое отступление. Найдем связь кинетических энергий E_k и $E_{k\&}$ системы материальных точек в лабораторной системе отсчета и в системе центра масс соответственно. По закону сложения скоростей, для каждой i-й материальной точки

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}_{i\&},$$

где $\vec{V}$ – скорость центра масс системы. Тогда кинетическая энергия системы материальных точек в лабораторной системе равна

$$E_k = \sum\frac{m_i\vec{v}_i^{\,2}}{2} = \sum\frac{m_i\left(\vec{V} + \vec{v}_{i\&}\right)^2}{2} =$$

$$= \sum\frac{m_i\vec{V}^2}{2} + \sum\frac{m_i\vec{v}_{i\&}^{\,2}}{2} + \vec{V}\sum m_i\vec{v}_{i\&}.$$

Сумма $\sum m_i\vec{v}_{i\&}$ равна нулю, так как она определяет скорость центра масс в системе центра масс. Таким образом,

$$E_k = \frac{MV^2}{2} + E_{k\&},$$

т.е. кинетическая энергия совокупности материальных точек в лабораторной системе отсчета равна сумме кинетической энергии всей массы системы, мысленно сосредоточенной в ее центре масс и движущейся вместе с ним, и кинетической энергии той же совокупности материальных точек в ее относительном движении в системе центра масс.

Теперь приступим к решению задачи. Обозначим через $\vec{p}_0$ импульс α-частицы до столкновения. Кинетическая энергия движения центра масс системы

$$\frac{MV^2}{2} = \frac{p_0^2}{2\left(m_{\mathrm{He}} + m_{\mathrm{N}}\right)} = \frac{m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{He}} + m_{\mathrm{N}}} E_{\text{пор}}$$

не изменяется при ядерной реакции, так как импульс замкнутой системы сохраняется и поэтому указанная энергия не участвует в ядерных превращениях. Тогда искомую энергию найдем из условия

$$E_{\text{пор}} = Q + \frac{m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{He}} + m_{\mathrm{N}}} E_{\text{пор}},$$

откуда

$$E_{\text{пор}} = \frac{m_{\mathrm{He}} + m_{\mathrm{N}}}{m_{\mathrm{N}}} Q = 1{,}45 \text{ МэВ}.$$

Заметим, что минимум кинетической энергии бомбардирующей частицы достигается в случае, когда продукты реакции покоятся в системе центра масс.

Задача 4. *Неподвижный невозбужденный атом водорода поглощает фотон. В результате атом переходит в возбужденное состояние и начинает двигаться. Найдите величину v скорости, с которой стал двигаться атом после поглощения фотона. Энергия возбуждения атома водорода $E_{12} = 1{,}63 \cdot 10^{-18}$ Дж, энергия покоя $mc^2 = 1{,}49 \cdot 10^{-10}$ Дж.*

Указание. При x? 1 можно считать, что $(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x$.

Первый способ решения. Поглощение фотона атомом является типичным неупругим столкновением. Из законов сохранения энергии:

$$\frac{hc}{\lambda} = E_{12} + \frac{mv^2}{2}$$

и импульса:

$$\frac{h}{\lambda} = mv$$

находим искомую скорость:

$$v = c\left(\sqrt{1 + \frac{2E_{12}}{mc^2}} - 1\right) \approx c\,\frac{E_{12}}{mc^2},$$

которая определяется только отношением энергии возбуждения к энергии покоя атома водорода. При выводе учтено, что в числителе стоит величина, на много порядков меньшая, чем в знаменателе. Это подтверждает нерелятивистское приближение, использованное в решении.

Итак, при переходе атома водорода из основного состояния в первое возбужденное состояние атом начинает двигаться со скоростью

$$v \approx c\,\frac{E_{12}}{mc^2} \approx 3{,}3 \text{ м/с}.$$

Второй способ решения. При записи законов сохранения энергии и импульса воспользуемся релятивистскими формулами для энергии и импульса:

$$mc^2 + \frac{hc}{\lambda} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Далее, разделим второе соотношение на первое и получим

$$v = c\,\frac{hc/\lambda}{mc^2 + hc/\lambda}.$$

Энергия поглощаемого фотона много меньше энергии покоя атома, поэтому выражение можно представить в виде

$$v \approx c\,\frac{hc/\lambda}{mc^2} = c\,\frac{E_{12}}{mc^2}.$$

Задача 5. *На неподвижный невозбужденный атом водорода налетает другой невозбужденный атом водорода. Какова минимальная кинетическая энергия налетающего атома, при которой в результате столкновения может излучиться фотон? Энергия ионизации атома водорода 13,6 эВ.*

Налетающий атом передаст на ионизацию максимально возможную энергию при таком неупругом столкновении, когда оба атома в системе центра масс будут покоиться. Кинетическая энергия движения центра масс системы, равная

$$\frac{p^2}{2\left(m_1 + m_2\right)} = \frac{p^2}{4m_p} = \frac{E_{\text{пор}}}{2}$$

(где m_p – масса протона, а $E_{\text{пор}}$ – пороговая энергия), не изменяется при ядерной реакции, так как импульс замкнутой системы сохраняется и поэтому указанная энергия не участвует в ядерных превращениях. Фотон унесет минимальную энергию, если электрон в атоме водорода перейдет с первого уровня на второй. Для этого атом должен поглотить энергию

$$h\nu_{12} = hR\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}hR = \frac{E_{\text{пор}}}{2},$$

где R – постоянная Ридберга. При ионизации электрон переходит с первого уровня на бесконечность; следовательно, энергия ионизации

$$E_{\text{и}} = hR.$$

Из полученных соотношений находим

$$E_{\text{пор}} = \frac{3}{2}E_{\text{и}} = 20{,}4 \text{ эВ}.$$

Задача 6. *Рентгеновский фотон сталкивается с неподвижным электроном и отражается в обратном направлении. Найдите приращение длины волны фотона в результате рассеяния.*

При энергиях в сотни тысяч электронвольт необходим учет релятивистских эффектов. Законы сохранения энергии и импульса принимают вид

$$mc^2 + \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{hc}{\lambda},$$

$$\frac{h}{\lambda_0} = -\frac{h}{\lambda} + \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где m – масса электрона, λ_0 и λ – длины волн фотона. Умножим второе равенство на c, сложим его с первым и вычтем его из первого равенства. Перемножив полученные соотношения, найдем

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 2\frac{h}{mc} = 4{,}84 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$$

Заметим, что это вполне согласуется с экспериментальными данными.

Упражнения

1. Ядро лития возбуждается пучком протонов, падающим на неподвижную литиевую мишень. При этом происходит реакция

$$p + {}^7\mathrm{Li} \to p + {}^7\mathrm{Li}^{\&}.$$

При каких отношениях энергии налетающего протона к энергии возбуждения лития возможно возникновение протонов, движущихся в обратном к потоку направлении?

2. На неподвижный невозбужденный атом водорода налетает электрон. Какова минимальная кинетическая энергия $E_{\text{пор}}$ налетающего электрона, при которой в результате столкновения может излучаться фотон? Энергия ионизации атома водорода $E_{\text{и}} = 13{,}6$ эВ.

3. Рентгеновский фотон сталкивается с неподвижным электроном и отражается в перпендикулярном направлении. Найдите приращение длины волны фотона в результате рассеяния.