Отсюда

$$OA = \frac{2}{5}AB = 2.$$

5. $[0;1)\cup(1;2]\cup\{3\}$. *Указание.* Пусть $A = |a| - 1$, $B = 1 - |a-2|$. Запишем уравнение в виде

$$A\cos 2x + B\sin 2x = -B\cos x + A\sin x.$$

Если $a = 1$, то $A = B = 0$, и все $x \in (-\pi;\pi)$ являются решениями. Если $a \neq 1$, то $A^2 + B^2 > 0$, и уравнение можно записать так:

$$\cos(2x - \varphi) = \cos\left(x - \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right),$$

где

$$\begin{cases}\cos\varphi = A\big/\sqrt{A^2+B^2},\\ \sin\varphi = B\big/\sqrt{A^2+B^2}.\end{cases}$$

Исходное уравнение, тем самым, равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z},\\ x = \dfrac{2\varphi}{3} + \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3}k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Первая строка этой совокупности дает одну фиксированную точку на тригонометрической окружности, а вторая строка – три зависящие от φ точки, дуги между которыми все равны по 120°. Число всех решений на дуге $(-\pi;\pi)$ будет нечетным только в тех случаях, когда одна из этих трех точек совпадает либо с π (или, что то же, с $-\pi$), либо с $-\dfrac{\pi}{2}$. Но тогда либо $A = B \neq 0$, либо $B = 0 \neq A$.

6. $\sqrt{38}$. *Указание.* Докажите, что суммы квадратов площадей противоположных граней пирамиды равны. Для этого введите прямоугольную систему координат: точка O пересечения диагоналей AC и BD – начало системы координат, ось Oz направим по лучу OS, ось Ox – перпендикулярно Oz в плоскости ASC, ось Oy – перпендикулярно Oz в плоскости BSD (рис.7). Вершины пирамиды получат следующие координаты: $S(0;0;h)$,

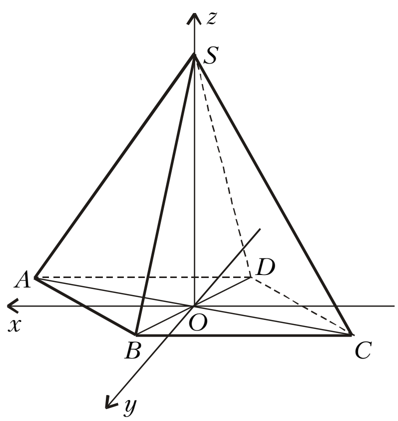

Рис. 7

$A(a;0;c)$, $C(-a;0;-c)$, $B(0;b;d)$, $D(0;-b;-d)$, так как точка A симметрична точке C, а точка B – точке D относительно начала координат O.

Найдите длины ребер пирамиды, а затем по формуле Герона вычислите площади граней ASB, ASD, BSC и CSD и убедитесь в том, что

$$S^2_{ASB} + S^2_{DSC} = S^2_{ASD} + S^2_{BSC}.$$

Вариант 3

1. $(-\infty;0]\cup[1;2]\cup[5;+\infty)$. **2.** $\{0;\log_3 2\}$.

3. $\left[2\operatorname{arctg}\dfrac{1+\sqrt{65}}{16};\dfrac{\pi}{3}\right)$. *Указание.* Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}\sin x - \cos x \geq 0,\\ 6 - 10\cos x - \sin x \geq 0,\\ 2\cos x > 1,\end{cases}$$

которая с помощью универсальной подстановки $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ превращается в систему квадратичных неравенств.

4. $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$. *Указание.* Пусть O – точка пересечения MN и CD (рис.8), $\alpha = \angle ACD$, $\beta = \angle DCB$, $MC = x$, $NC = y$. Тогда,

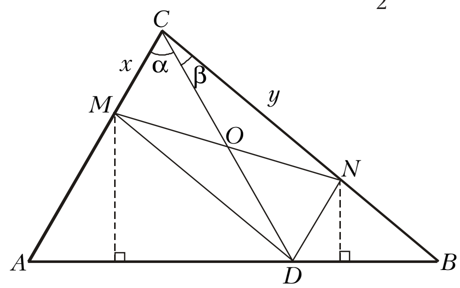

Рис. 8

поскольку $\alpha + \beta = 120^\circ$ и $3\sin\alpha = 4\sin\beta$, получим

$$\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{3},\ \sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}},\ \sin\beta = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}.$$

Выражая двумя способами площадь треугольника MCN, имеем после упрощений

$$\begin{cases}xy = 12,\\ 4x + 3y = 24,\end{cases} \quad \text{т.е. } x = 3,\ y = 4.$$

Далее, вычислив S_{MCO}, получим

$$S_{\Delta MCO} = \frac{1}{2}\cdot S_{\Delta MCN},$$

откуда $S_{\Delta MCO} = S_{\Delta CON}$, следовательно, $MO = ON$, значит, $MCND$ – параллелограмм. Таким образом, $AC \parallel DN$, $MD \parallel BC$, поэтому треугольник AMD подобен треугольнику DNB, причем из условия задачи следует, что коэффициент подобия равен 2. Поэтому $AM = 2DN = 2CM = 6$, $NB = \dfrac{MD}{2} = \dfrac{CN}{2} = 2$, $AC = 9$, $BC = 6$ и $S_{\Delta ABC} = \dfrac{27\sqrt{3}}{2}$.

5. $\begin{cases}x = \dfrac{a-3}{4},\\ y = \log_2\left(15a^2 - 26a + 7\right) - 2\end{cases}$ при $a \in \left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{7}{5};+\infty\right)$;

$\begin{cases}x = -\dfrac{a+1}{2},\\ y = 1 + \log_2\left(4a - 3a^2 - 1\right)\end{cases}$ при $a \in \left(\dfrac{1}{3};1\right)$;

$\begin{cases}x = 1 - a,\\ y = 1 + \log_2\left(12a - 5a^2 - 7\right)\end{cases}$ при $a \in \left(1;\dfrac{7}{5}\right)$;

$\begin{cases}x = b, \text{ где } b \in (-\infty;-1)\cup(0;+\infty),\\ y = \log_2\left(4b^2 + (14a-10)b + 8a - 8\right)\end{cases}$ при $a = 1$;

нет решений при $a = \dfrac{1}{3};\ \dfrac{7}{5}$. *Указание.* После замены

$$u = \log_2\left(4x^2 + (14a-10)x + 8a - 8\right),$$

$$v = \log_2\left|4x^2 + (6-2a)x + 4a^2 - 8a + 4\right|$$