Поскольку при $A > 0$ и $t > 0$ выполняется неравенство

$$t + \frac{A}{t} \geq 2\sqrt{A},$$

условия разрешимости уравнений (1) и (2) имеют, соответственно, вид

$$\frac{3}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^{a} + \frac{8}{5} \geq 2\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{a}{2}};$$

$$4\left(\frac{3}{2}\right)^{2a-5} - 2 \geq 2\left(\frac{3}{2}\right)^{a-\frac{5}{2}}.$$

Решая эти неравенства и учитывая, что корни второго уравнения должны быть положительны, получаем условия

1) $a \leq 2\log_{\frac{3}{2}} \frac{4}{3}$; $a \geq 2\log_{\frac{3}{2}} 2$;

2) $a \geq \frac{5}{2}$.

Рассмотрим первую систему из совокупности (3). Из условий 1) и 2) находим «подозрительные» значения a – это $a \in \boldsymbol{Z}$, $a \leq 0$ и $a = 1$. Для $a = 1$ условия задачи выполняются, для $a \leq 0$ – нет (докажите это, сравнивая левую и правую части уравнения (1) при целых x и $a - x$). Второй системе из совокупности (3) удовлетворяет лишь $a = \frac{5}{2}$.

6. 2. *Указание.* Пусть α – плоскость, проходящая через центр сферы и перпендикулярная хорде PP_1. Эта плоскость делит пополам хорду PP_1, а также параллельные ей хорды QQ_1, RR_1 и SS_1. Следовательно, $P_1Q_1R_1S_1$ – квадрат со стороной $25/4$, симметричный квадрату $PQRS$ относительно плоскости α.

Пусть $SS_1 = 2x$, т.е. x – расстояние от точки S до плоскости α. Спроектируем все точки на координатную прямую l, перпендикулярную α. Пусть сама плоскость α проектируется в начало координат на l, а направление на оси l выбрано так, что координата $\pi(Q)$ проекции точки Q равна 5. Тогда $\pi(Q_1) = -5$, $\pi(P) = -\pi(P_1) = \pm 1$, $\pi(R) = -\pi(R_1) = \pm 3$, $\pi(S) = -\pi(S_1) = \pm x$. Координату проекции точки A – центра квадрата $PQRS$ – можно вычислить двумя способами:

$$\pi(A) = \frac{\pi(P) + \pi(R)}{2} = \frac{\pi(Q) + \pi(S)}{2} \Leftrightarrow \frac{\pm 1 \pm 3}{2} = \frac{5 + \pi(S)}{2}.$$

Таким образом, возможны четыре случая:

	$\pi(P)$	$\pi(Q)$	$\pi(R)$	$\pi(S)$
1.	1	5	3	–1
2.	1	5	–3	–7
3.	–1	5	–3	–9
4.	–1	5	3	–3.

Покажем, что случаи 2, 3 и 4 невозможны. Например, в случае 2 отрезки SQ и S_1Q_1 длины $25/4$ оказываются диагоналями трапеции S_1QQ_1S (рис.5). Но

$$QS + Q_1S_1 = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} < 14 = SS_1,$$

что невозможно. Аналогично докажите невозможность случая 3. В случае 4 рассмотрите параллелограмм $KLMN$, образованный серединами отрезков PP_1, QQ_1, RR_1 и SS_1 соответственно, вычислите его стороны и диагональ KM и докажите, что $KM > KL + LM$, что противоречит неравенству треугольника.

В оставшемся случае 1 получаем $SS_1 = 2|\pi(S)| = 2$.

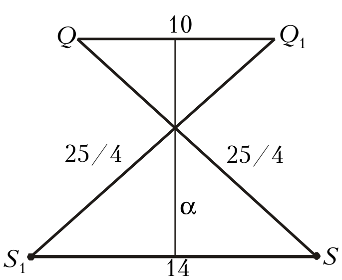

Рис. 5

Вариант 2

1. $\left[0; \log_{\frac{3}{2}} \frac{4}{3}\right) \cup \left(\log_{\frac{3}{2}} \frac{4}{3}; 1\right]$. **2.** $(5/8; 4)$.

3. а) 6; б) 192.

а) Первый автобус появляется в пункте B в моменты времени

$$t_n = \frac{2}{51} + \frac{4}{51} \cdot n,$$

где $n \in \boldsymbol{Z}$, причем $t_n \leq 8$, откуда $n \leq 101$. Второй автобус появляется в пункте B в моменты времени $s_k = \frac{4}{42} \cdot k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Встреча автобусов в пункте B означает равенство $t_n = s_k$, т.е. $\frac{2}{51} + \frac{4}{51}n = \frac{4}{42}k$, или $7(1 + 2n) = 17k$. Последнее равенство выполняется только тогда, когда нечетное число $1 + 2n$ делится на 17, т.е. $1 + 2n = 17, 51, 85, 119, 153, 187, 221, \ldots$ Поскольку $0 \leq n \leq 101$, должно быть $1 \leq 1 + 2n \leq 203$, так что подходят только первые шесть чисел, причем для всех них $k = 7 \cdot \frac{1+2n}{17}$ – целое. Таким образом, в пункте B было 6 встреч.

б) При каждом прохождении отрезка AB первый автобус ровно 1 раз оказывается в одной точке $X \in AB$ со вторым автобусом: либо в момент встречи, либо в момент обгона, причем в случае $X = A$ или $X = B$ в точке X происходят и встреча, и обгон одновременно. Поэтому число совпадений положений автобусов строго между пунктами A и B равно числу прохождений первым автобусом отрезка AB ($\frac{51}{2} \cdot 8 = 204$ раза) минус удвоенное суммарное число встреч в точках A и B. Число встреч в пункте B равно 6 (см. п.а)). В пункте A первый автобус появляется в моменты времени $\frac{4}{51} \cdot n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, а второй автобус – в моменты времени $\frac{2}{42} + \frac{4}{42} \cdot k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, причем встреча в пункте A означает равенство $28n = 17(1 + 2k)$, что невозможно.

4. $CE = 6$, $OA = 2$. Проведем общую касательную FG к окружностям в точке A (рис.6). Углы $\angle DBA$ и $\angle FAB$ равны как опирающиеся на одну дугу, $\angle FAB = \angle CAG$, углы $\angle CAG$ и $\angle CEA$ равны как опирающиеся на одну дугу. Таким образом, треугольники CBE и CEA подобны по двум углам, откуда

$$\frac{BC}{CE} = \frac{CE}{AC} \Rightarrow CE = \sqrt{BC \cdot AC} = \sqrt{9 \cdot 4} = 6.$$

Далее, $\angle BAD = 180° - \angle DAC = \angle CEB = \angle CAE$ (последнее равенство следует из доказанного выше подобия треугольников CBE и CEA), так что луч AB является биссектрисой угла между лучом AD и продолжением луча EA за точку A. Следовательно, центр O окружности, о которой идет речь во втором вопросе задачи, лежит на отрезке AB. Поскольку O лежит и на биссектрисе угла $\angle BDA$, по свойству биссектрисы и из подобия $\Delta BDA \backsim \Delta BCE$

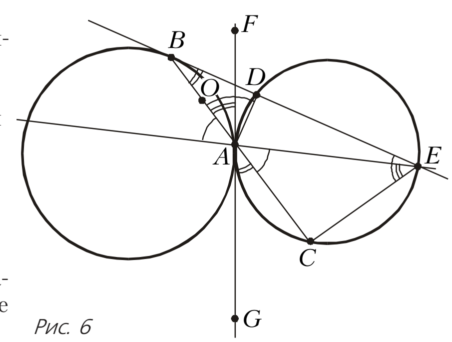

Рис. 6

$$\frac{OB}{OA} = \frac{BD}{AD} = \frac{BC}{CE} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$