Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» №4 за 2000 г.)

1. Из рисунка 1 видно, что $\angle A_1LB_1 = 45°$, $\angle KLM = 45°$. Из рисунка также следует, что $\angle AKL = 45°$ и $\angle LMB = 45°$. (В силу симметрии задачи точки B_1, L_2, A, L, B, L_1, A_1 располагаются в вершинах правильного восьмиугольника.)

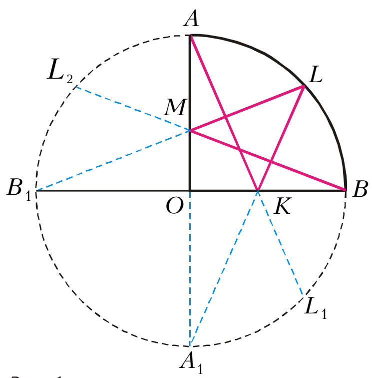

Рис. 1

2. Нельзя. Задача решается стандартным методом *инварианта*, а именно – поиском ответа на вопрос: что *не меняется* при указанной операции? Попробовав и то, и другое, в конечном счете можно заметить, что *сумма квадратов* всех чисел не изменяется. В самом деле:

$$\left(\frac{3A-4B}{5}\right)^2+\left(\frac{4A+3B}{5}\right)^2=A^2+B^2.$$

Если в результате все числа (их количество равно 21) стали равны некоторому X, то, учитывая неизменность суммы квадратов, получаем

$$21X^2=(-10)^2+(-9)^2+\ldots+(-1)^2+0^2+1^2+\ldots+10^2=770,$$

откуда

$$X=\sqrt{\frac{770}{21}}=\sqrt{\frac{110}{3}}$$

– число иррациональное. В то же время ясно, что при указанных преобразованиях все числа остаются рациональными. Противоречие показывает, что добиться уравнивания всех чисел невозможно.

3. Верно. Пусть основаниями перпендикуляров, опущенных из некоторой точки O на стороны четырехугольника $ABCD$, являются точки M, N, K и E (рис.2). Рассмотрим точку O_1 пересечения отрезков MK и NE. Если $ABCD$ отличен от параллелограмма, то по неравенству треугольника следует, что сумма расстояний до сторон четырехугольника от точки O больше, чем $MK + NE$. Значит, она больше, чем сумма расстояний до сторон от точки O_1. Получили противоречие с условием задачи. Если же четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм, то сумма расстояний от любой точки внутри него до всех его сторон постоянна и равна $(a+b)\sin\alpha$, где a, b – длины сторон параллелограмма, а α – один из его углов.

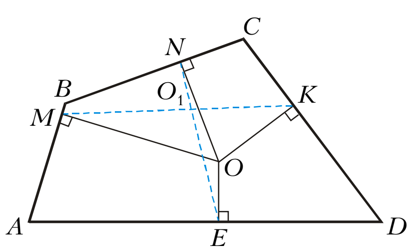

Рис. 2

4. Не может. Допустим противное: $n^2+n+1=m^2$, где m – целое. Но число n^2+n+1 заключено между двумя последовательными квадратами натуральных чисел: $n^2<n^2+n+1<(n+1)^2$, поэтому оно не может равняться квадрату целого числа.

5. Будем говорить, что каждый участок контролирует свой перекресток и все соседние с ним перекрестки. Пусть n – наименьшее число участков, которые можно разместить в городе при заданных условиях, v_1, v_2, …, v_n – перекрестки, на которых установлены участки, d_i – число перекрестков, соседних с перекрестком v_i. Участки в сумме контролируют $D=(d_1+1)+(d_2+1)+\ldots+(d_n+1)\le 7n$ перекрестков, причем, возможно, в эту сумму некоторые перекрестки входят более одного раза. Так как каждый перекресток города контролируется, то $155\le 7n$. Отсюда $n\ge 23$.

Сколько мест в автобусе и другие задачи

1. Из условия, что у Асика и Басика вместе на 6 морковок больше, чем у Басика и Васика, следует, что у Асика на 6 морковок больше, чем у Васика. Если бы у Васика было не менее 2 морковок, то у Асика – не менее 8. Тогда бы Басику морковки не достались. Значит, у Васика была одна морковка, у Асика – семь, а у Басика – оставшиеся две.

2. Басик съел более 42 : 3 = 14 яблок, причем это количество кратно 3 (так как Асик съел в 3 раза меньше, чем Басик). Но если Басик съел более 15 яблок (а значит, не менее 18), то Асик съел не менее 6, а Васик – не более 42 – 18 – 6 = 18, т.е. не более Басика, а это противоречит условию. Значит, Басик съел 15 яблок, откуда нетрудно определить, что Асик съел 5 яблок, а Васик – 22 яблока.

3. Так как в каждой строке может стоять не более трех шашек, то всего шашек не более $3\cdot 6=18$. Так как в каждом столбце стоит не менее двух шашек, то всего стоит не менее $2\cdot 8=16$ шашек. Значит, на доске может быть расставлено 16, 17 или 18 шашек. Все три варианта возможны (рис.3).

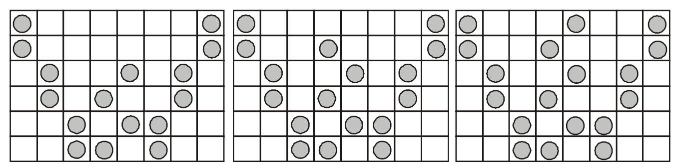
Рис. 3

4. Если на первой остановке вышли 5 человек, то за последующие 14 остановок автобус покинули 90 пассажиров. Пусть водитель открывал обе двери k раз. Тогда на этих k остановках вышли $11k$ человек, а на оставшихся $(14-k)$ остановках – не менее $4(14-k)$ человек. Поэтому $11k+4(14-k)\le 90$, откуда $k\ge 4$.

С другой стороны, на оставшихся $14-k$ остановках вышли не более $5(14-k)$ пассажиров, значит, $11k+5(14-k)\ge 90$, откуда $k\ge 4$.

Получили, что $k=4$, т.е. обе двери открывали 4 раза.

5. Если бы у первого крольчонка было не менее двух наклеек, то у второго – не менее 3, …, у десятого – не менее 11, т.е. всего не менее 2 + 3 + … + 11 = 65, что невозможно. Значит, первому крольчонку досталась одна наклейка, второму – две наклейки, …, девятому – 9, а десятому – оставшиеся 19 наклеек.

6. Пусть мед заполняет x пятидесятилитровых бутылей. Из первого условия следует, что объем меда более $40(x+4)$ литров, из второго – что он более $70(x-5)$ литров. Тогда имеют место неравенства

$$50x>40(x+4) \text{ и } 50x>70(x-5).$$

Из первого неравенства следует, что $x>16$, из второго – что $x<17{,}5$, т.е. $x=17$. Отсюда общий объем меда – 850 литров.

7. Наибольшее натуральное число, квадрат которого записывается тремя цифрами, это 31. Значит, число Совы не более 26. Наименьшее натуральное число, куб которого имеет 5 цифр, это 22. Значит, число Совы не менее 26. Таким образом, число Совы равно 26.