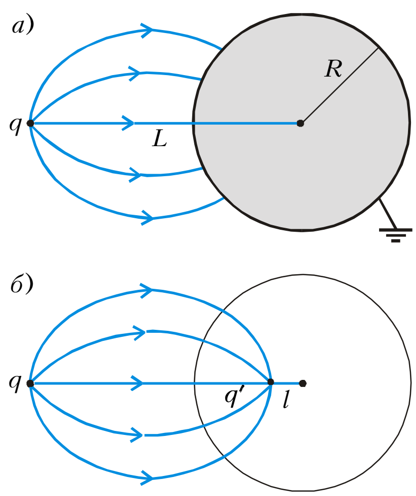

Рис. 5

$q' = -qR/L$ и расположенного на расстоянии $l = R^2/L$ от центра шара.

Тождественное совпадение этих двух полей следует из утверждения, что эквипотенциальная поверхность с $\varphi = 0$ для поля зарядов q и q' совпадает с поверхностью шара. Убедимся в этом. Возьмем произвольную точку A на поверхности шара (рис.6) и обозначим через r_1 расстояние от

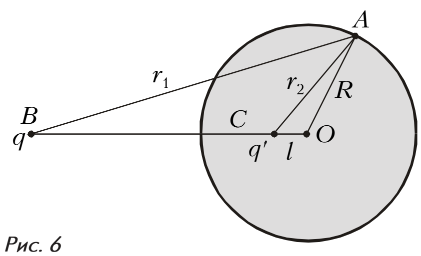

Рис. 6

нее до заряда q (точка B), а через r_2 — расстояние до заряда q' (точка C). Поскольку $AO : OC = R/l = L/R = BO : OA$, треугольник AOC подобен треугольнику BOA. Значит, для любой точки A отношение r_1/r_2 равно L/R и потенциал $\varphi(A) = kq/r_1 + kq'/r_2$ равен нулю (напомним, что $q' = -qR/L$).

Иначе говоря, поле, создаваемое наведенными зарядами вне шара, совпадает с полем одного точечного заряда q'.

Пример 3. Точечный заряд и заряженный шар. Если в условии предыдущего примера заменить заземленный шар на заряженный зарядом Q, то к заряду-изображению q' необходимо добавить второй заряд-изображение $q'' = Q - q'$, помещенный в центр шара.

Каким же образом можно использовать метод электростатических изображений в случае проводящего шара в однородном поле? Поскольку результат не должен зависеть от того, какая система зарядов является источником поля $\vec{E}_0$, будем считать, что оно создается двумя зарядами q и $-q$ (рис.7), расположенными симметрично относительно центра шара на большом от него расстоянии ($L \cong R$). Величину зарядов надо выбрать таким образом, чтобы создаваемая ими в центре шара напряженность была равна E_0:

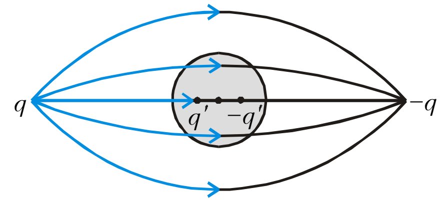

Рис. 7

$$\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 L^2} = E_0 .$$

Поле наведенных зарядов в пространстве вне шара будет совпадать с полем двух точечных зарядов q' и $-q'$, где $q' = -qR/L$, расположенных на расстоянии $l = R^2/L$ от центра. Два заряда-изображения образуют диполь с дипольным моментом, равным

$$p = q' \cdot 2l = \frac{2qR^3}{L^2} = 3V\varepsilon_0 E_0 ,$$

что совпадает с формулой (3). Если рассмотреть предельный переход, при котором заряды удаляются на бесконечность, но одновременно их величина меняется так, что напряженность поля остается равной E_0, то поле будет стремиться к однородному, а диполь будет стремиться к точечному (при сохранении дипольного момента).

Остается ответить на вопрос: как в рамках метода электростатических изображений найти не только поле наведенных зарядов, но и их распределение по поверхности? Это можно сделать с помощью соотношения, связывающего напряженность поля у поверхности проводника с поверхностной плотностью заряда:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} . \qquad (4)$$

Например, в случае заряда и проводящей плоскости нетрудно вычислить напряженность поля зарядов q и $-q$ на расстоянии x от точки, лежащей посередине между ними (рис.8), и найти поверхностную плотность зарядов:

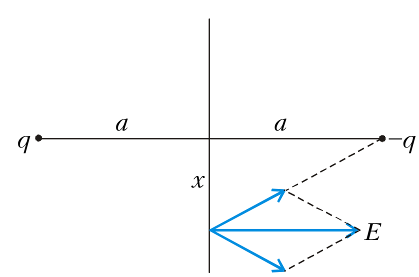

Рис. 8

$$\sigma = \varepsilon_0 E = \frac{qa}{2\pi\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}} .$$

В случае шара в однородном поле надо вычислить полное поле, равное сумме однородного внешнего поля и поля точечного диполя (см. Приложение) возле поверхности сферы. Попробуйте сделать это самостоятельно.

Как убедиться в справедливости формулы (4)? Проще всего это сделать с помощью теоремы Гаусса (кто с ней знаком), но можно обойтись и без нее. Представим поле вблизи поверхности в виде суперпозиции двух полей (рис.9): поля $\vec{E}_1$, созданного малым близлежащим участком поверхнос-

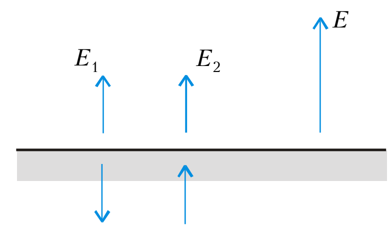

Рис. 9

ти, которое можно считать равным полю бесконечной плоскости $E_1 = \sigma/(2\varepsilon_0)$ (в пределе, когда расстояние до поверхности мало по сравнению с размером этого участка), и поля остальных зарядов $\vec{E}_2$. Внутри проводника эти два поля должны сократить друг друга, поэтому $E_2 = E_1 = \sigma/(2\varepsilon_0)$. Вне проводника эти напряженности складываются, откуда и получается формула (4).

Конечно, может возникнуть вопрос: а как (без теоремы Гаусса) получить формулу $E = \sigma/(2\varepsilon_0)$ для напряженности бесконечной равномерно заряженной плоскости, на которую опирается этот вывод? Можно сделать это, рассмотрев поле равномерно заряженной сферы, которое совпадает (вне сферы) с полем точечного заряда, а вблизи поверхности равно σ/ε_0. Если провести такое же рассуждение, как выше, но в обратном порядке, то получим искомую формулу.

Метод наложения шаров

Последний из рассматриваемых здесь подходов к решению задачи о проводящем шаре в однородном поле дает наиболее полное, и притом достаточно простое, ее решение. Как и раньше, мы разобьем изложение этого метода на несколько последовательных этапов, каждый из которых представляет свою интересную задачу.

1. Равномерно заряженный шар. Рассмотрим шар радиусом R, равномерно заряженный с объемной плот-