Соображения симметрии

Исходя из соображений симметрии (и единственности) можно дать столь простое и изящное доказательство формулы (1), что кажется, будто она возникает «из ничего», как кролик из шляпы фокусника. Мы представим это доказательство в виде цепочки последовательных утверждений.

Утверждение 1. Во всех точках окружности большого круга, перпендикулярного напряженности $\vec{E}_0$ (т.е. в точках с $\theta = 90°$), поверхностная плотность заряда равна нулю (рис.2). Это

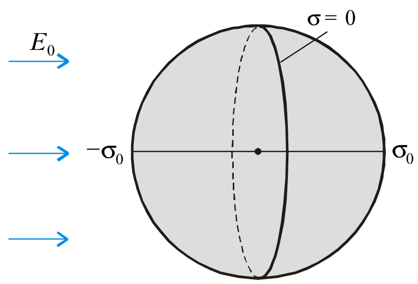

Рис. 2

следует из симметрии между положительными и отрицательными зарядами.

Утверждение 2. Если при помещении шара в поле с напряженностью $\vec{E}_1$ поверхностная плотность заряда в некоторой точке равна σ_1, а при помещении в поле с напряженностью $\vec{E}_2$ она равна σ_2, то в поле с напряженностью $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ поверхностная плотность заряда в этой точке будет $\sigma_1 + \sigma_2$. То, что поверхностные плотности, наведенные разными полями, складываются, следует из теоремы единственности: каждая поверхностная плотность уничтожит свою напряженность, и *полная напряженность* останется равной нулю, поскольку существует лишь *единственное* распределение заряда, удовлетворяющее этому условию.

Утверждение 3. Если напряженность внешнего поля увеличить в α раз ($\vec{E}' = \alpha\vec{E}$), то поверхностная плотность заряда в каждой точке увеличится в α раз ($\sigma' = \alpha\sigma$). Действительно, увеличение в α раз плотности заряда приведет к увеличению в α раз собственной напряженности, и полная напряженность внутри шара останется равной нулю — в дело опять вступает теорема единственности...

Основное рассуждение. Рассмотрим шар, помещенный в однородное поле $\vec{E}_0$ (рис.3). Пусть максимальная плотность наведенного заряда (при $\theta = 0$) равна σ_0. Чтобы найти $\sigma(\theta)$, разложим $\vec{E}_0$ на две взаимно перпен-

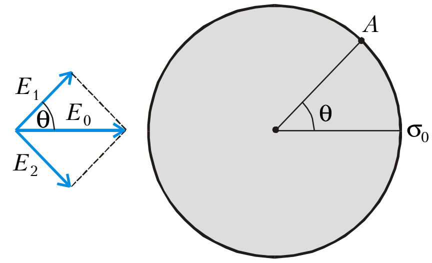

Рис. 3

дикулярные составляющие: $\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, одна из которых ($\vec{E}_1$) составляет с $\vec{E}_0$ угол θ. Поскольку $E_1 = E_0 \cos\theta$, при помещении шара в поле $\vec{E}_1$ максимальная плотность заряда в точке A будет $\sigma_0 \cos\theta$ (см. утверждение 3). А если поместить шар в поле $\vec{E}_2$, поверхностная плотность заряда в точке A будет равна нулю (см. утверждение 1). Значит, в соответствии с утверждением 2, в поле $\vec{E}_0$ поверхностная плотность заряда в точке A будет $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta$.

Конечно, такое рассуждение не позволяет сразу определить, чему равна σ_0. Но эта задача гораздо проще, чем задача об определении неизвестного распределения заряда. Когда распределение уже известно, можно воспользоваться принципом суперпозиции, выразить напряженность, создаваемую этим распределением в центре шара, и приравнять ее к E_0. Если вы умеете интегрировать, попробуйте таким образом получить формулу (2).

Однако задача о напряженности, создаваемой наведенными зарядами вне шара, в рамках этого подхода остается нерешенной. Два других подхода позволят нам получить более полное решение поставленной задачи.

Метод электростатических изображений

Метод электростатических изображений позволяет не угадать распределение наведенных зарядов по поверхности, а определить создаваемое ими поле, заменив его полем воображаемых зарядов (изображений), расположенных внутри проводника. Заряды-изображения подбираются так, чтобы полное поле, создаваемое ими и внешними зарядами, имело «правильные» свойства на границе проводника. Например, если проводник по условию заземлен, то это поле должно иметь всюду на границе нулевой потенциал. Если же задан заряд проводника, то, во-первых, поверхность проводника должна быть эквипотенциальной и, во-вторых, сумма зарядов-изображений должна быть равна заданному заряду. Поскольку существует единственное поле, удовлетворяющее таким, как их называют, «граничным условиям», то поле зарядов-изображений должно совпадать с полем наведенных зарядов проводника. Вот несколько примеров.

Пример 1. Точечный заряд и проводящая плоскость. Этот пример хорошо известен многим школьникам. Если точечный заряд q поднести на расстояние a к бесконечной проводящей плоскости (рис.4,*а*), то возникающее при этом поле совпадает с полем двух точечных зарядов (рис.4,*б*): самого заряда q и заряда-изображения $-q$,

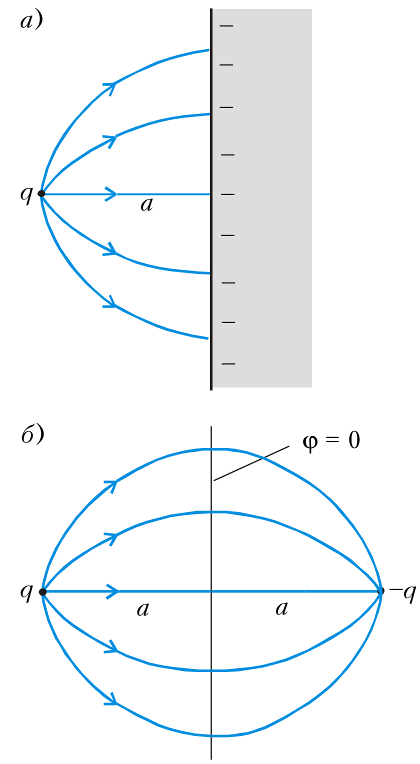

Рис. 4

расположенного за плоскостью симметрично заряду q (как изображение источника света в плоском зеркале). Действительно, эквипотенциальная поверхность поля двух таких зарядов с $\varphi = 0$ совпадает с поверхностью проводника. Иначе говоря, поле, создаваемое наведенными зарядами в пустом пространстве, совпадает с полем одного точечного заряда $-q$.

Пример 2. Точечный заряд и заземленный шар. Если к заземленному шару радиусом R на расстояние L от его центра ($L > R$) поднести точечный заряд q (рис.5,*а*), то возникающее поле совпадает с полем двух точечных зарядов (рис.5,*б*): самого заряда q и заряда-изображения, равного