Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 2001 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1 – 2001» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1756» или «Ф1763». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1761 – М1763 предлагались на XLI Международной математической олимпиаде.

Задачи Ф1764 – Ф1766 и Ф1768 – Ф1771 предлагались на заочном туре Соросовской олимпиады по физике.

Задачи М1756—М1765, Ф1763 — Ф1772

М1756. Даны несколько различных натуральных чисел. Известно, что среди любых трех из них можно выбрать два так, чтобы одно делилось на другое. Докажите, что все числа можно покрасить в два цвета так, чтобы для любых двух чисел одинакового цвета одно делилось на другое.

Е.Черепанов

М1757*. Выпуклый многоугольник можно разрезать на 20 параллелограммов. Докажите, что этот многоугольник можно разрезать на 15 параллелограммов.

В.Произволов

М1758. Всякий депутат имеет свой (абсолютный) рейтинг. В начальный момент после избрания каждый депутат вошел в одну из фракций, в которой он может подсчитать свой относительный рейтинг. Возможен переход депутата из одной фракции в другую, если его относительный рейтинг при этом увеличивается. Пусть в каждый момент времени может происходить лишь один такой переход. Докажите, что спустя конечное время все рейтинговые переходы прекратятся.

В.Ильичев

М1759. Имеется остроугольный треугольник с меньшей стороной c и противолежащим ей углом γ. Известно, что треугольник можно раскрасить в два цвета так, что расстояние между любыми двумя точками одного цвета будет не больше c. Докажите, что $\gamma \geq 36°$.

А.Эвнин

ПОПРАВКА. В условии задачи М1754 (см. «Квант» №6 за 2000 г.) допущена опечатка. В 5-й строке текста задачи слово «черных» следует заменить словом «четных».

М1760. Таблицу размером $n\times n$ клеток назовем удивительной, если она обладает следующим свойством: всякие n чисел таблицы такие, что в каждом столбце таблицы и в каждой строке таблицы присутствует ровно одно из них, дают одну и ту же сумму. Докажите, что каждая удивительная таблица может быть представлена в виде суммы двух таблиц, у одной из которых в каждом столбце все числа равны, а у другой – в каждой строке все числа равны.

Например, $\begin{pmatrix} 3,\ 4,\ 1 \\ 6,\ 7,\ 4 \\ 5,\ 6,\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,\ 3,\ 0 \\ 2,\ 3,\ 0 \\ 2,\ 3,\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,\ 1,\ 1 \\ 4,\ 4,\ 4 \\ 3,\ 3,\ 3 \end{pmatrix}$.

В.Произволов

М1761. У фокусника 100 карточек, занумерованных числами от 1 до 100. Он раскладывает все карточки в три ящика – красный, белый и синий – так, чтобы в каждом ящике лежала хотя бы одна карточка.

Один из зрителей выбирает два из трех ящиков, вынимает из них по одной карточке и объявляет сумму номеров вынутых карточек. Зная эту сумму, фокусник определяет тот ящик, из которого карточки не вынимались.

Сколькими различными способами можно разложить карточки по ящикам так, чтобы этот фокус всегда удавался?

(Способы, при которых хотя бы одна карточка попадает в разные ящики, считаются различными.)

(Венгрия)

М1762. Существует ли натуральное число n такое, что n имеет ровно 2000 различных простых делителей и $2^n + 1$ делится на n?

В.Сендеров