

Рис.2. Множество Мандельброта

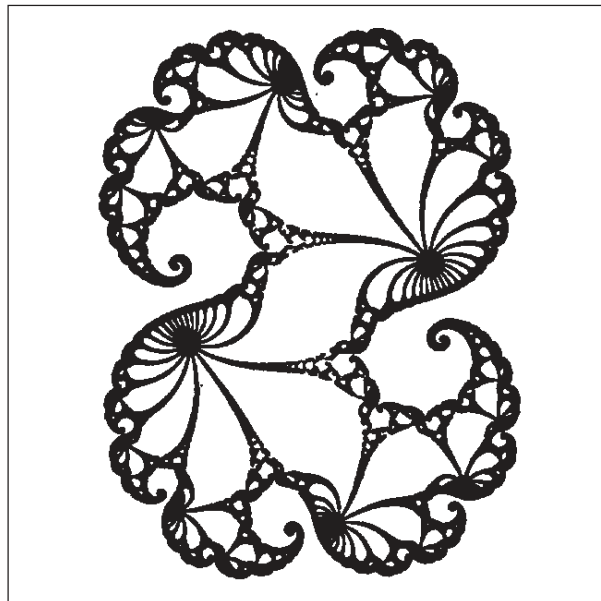


Рис.3. Множество Жюлиа

ми системами. Такие системы порождают узоры необыкновенной красоты. Честь открытия этих узоров принадлежит Бенуа Мандельброту (родившемуся в Варшаве, получившему степень доктора философии по математике в Париже, ныне профессору прикладной математики в Гарвардском университете).

На рисунке 2 изображено одно из «множеств Мандельброта». Эта необычайная картина получается из простейшего итерационного процесса, а именно такого: $z_{n+1} = z_n^2 + c$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где c и z_0 – комплексные числа. Если положить $c = 0$ и взять z_0 внутри единичного круга, то числа z_n будут стремиться к нулю. В этом случае говорится, что нуль является *аттрактором* для нашей последовательности. Если $|z_0| > 1$, то последовательность z_n устремляется к бесконечности (т.е. и бесконечность является аттрактором). А если $|z_0| = 1$, то последовательность будет вечно блуждать по единичной окружности. Таким образом, единичная окружность является здесь границей двух областей, в каждой из которых точки последовательности притягиваются к своему аттрактору. Эта окружность называется множеством Жюлиа (по имени французского математика, изучавшего подобные множества еще во втором десятилетии прошедшего века). Множество Жюлиа для значения $c = -0,12 + 0,74i$

изображено на рисунке 3. Мандельброт же с помощью компьютера сумел нарисовать те множества c , при которых множество Жюлиа связно. Таким примером и является множество, изображенное на рисунке 2.

Множества Жюлиа и Мандельброта устроены весьма сложно, но вместе с тем они обладают рядом примечательных особенностей. В частности, множества Жюлиа «самоподобны»: фрагмент этого множества повторяет структуру всего множества в целом. Такого рода множества Мандельброт назвал *фракталами*.

Математика и космос

К числу величайших завоеваний XX века вне всякого сомнения следует отнести рождение космической эры. Здесь, разумеется, также не обошлось без математики. Родилась новая ветвь теории экстремума – теория оптимального управления² (лидерами его были у нас Л.С.Понтрягин, а в США – Р.Беллман), а также новая ветвь теоретической механики, получившая парадоксальное наименование – «прикладная небесная механика». Наличие мощных вычислительных средств позво-

лило ставить численные эксперименты с небесными системами, подобными нашей Солнечной. Все планеты нашей системы движутся по почти круговым орбитам, лежащим почти в одной плоскости. А что было бы, если бы орбита Луны была перпендикулярна орбите Земли? Выяснилось, что Луна упала бы на Землю через четыре с половиной года! Наблюдение за поведением спутников позволило открыть ряд новых явлений природы, например «дыхание атмосферы» (на солнечной стороне линии равной плотности атмосферы вытягиваются в сторону Солнца и прижимаются к Земле на теневой стороне). Оба описанных факта – падение Луны и дыхание атмосферы – были открыты М.Л.Лидовым.

² Теории экстремума и, в частности, теории оптимального управления посвящена моя книга «Рассказы о максимумах и минимумах» (Библиотечка «Квант», вып. 56).