$= \left(e^{ik\gamma}-1\right)^{-1} y_k$, но в силу малости некоторых знаменателей $\left(e^{ik\gamma}-1\right)$ не при всяких $\left\{y_k\right\}$ ряд Фурье для функции $x(t)$ сойдется. Но если, с одной стороны, число γ не слишком хорошо приближается рациональными, а, с другой, числа y_k достаточно быстро убывают, то ряд Фурье сойдется, и наше уравнение окажется разрешимым. Однако в проблеме об эволюции орбит в задаче трех тел встречаются уравнения еще более сложные, когда надо решить уравнение $x(t+\gamma+\xi(t)) - x(t) = y(t)$, где $\xi(t)$ – некоторая известная функция, являющаяся малым возмущением поворота на угол γ. Метод Колмогорова состоял в том, чтобы решать такое уравнение, используя и технику работы с малыми знаменателями, и известный метод Ньютона решения уравнения $f(x)=y$. (Для данной задачи существенные результаты были получены Арнольдом.)

Метод Колмогорова был усовершенствован Владимиром Игоревичем Арнольдом и Юргеном Мозером (которого у нас уже был повод упомянуть). Он получил название КАМ-теории (теории Колмогорова—Арнольда—Мозера). КАМ-теория дала возможность разрешить очень большое число проблем, к которым не было ранее никакого подхода.

Проблема финальных движений

Но задача трех тел столь многогранна, что не представляется возможным ее когда-либо исчерпать. В прошедшем веке была разрешена еще одна известная проблема в задаче трех тел – *проблема финальных движений.* Она состоит в описании поведения трех тел, взаимодействующих между собой по закону всемирного тяготения, при $t \to -\infty$ и при $t \to +\infty$. Простейшие случаи, когда все расстояния между телами остаются ограниченными или когда, наоборот, все расстояния стремятся к бесконечности и в ту и в другую сторону, были известны еще Ньютону. Первые примеры «простых невозможностей» были обнаружены еще во времена Лапласа. Сама задача в явной форме была поставлена Якоби.

К тому моменту, когда А.Н.Колмогоров (в 1954 году) предложил своему студенту-третьекурснику Володе Алексееву курсовую работу на тему «Финальные движения в задаче трех тел», оставались логически допустимыми следующие возможности (все они реализуются и во взаимоотношениях между людьми): *обмен* (когда звезда прилетает из бесконечности и отрывает от другой звезды ее спутника); *частичный захват* (когда три звезды приближаются друг к другу из бесконечности, затем две образуют двойную звезду, а третья улетает); *полный захват* (когда двойная звезда захватывает третью, прилетевшую из бесконечности); *захват в осцилляцию* (когда тело прилетает к двойной звезде и начинает затем осциллировать, т.е. расстояние от этого тела до двойной звезды неограниченно, но не стремится к бесконечности); *двойная осцилляция* – осцилляция в прошлом и будущем; наконец, *переход из ограниченного движения в осцилляцию.*

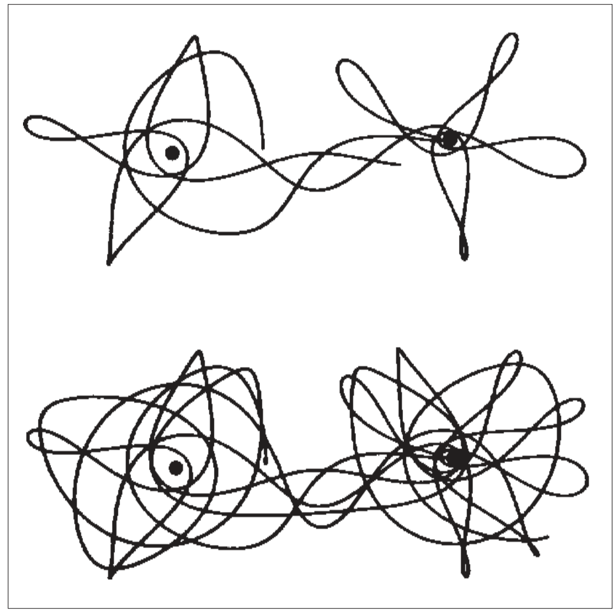

Рис.1. Типичная траектория решения задачи трех тел в небесной механике. Вверху показано начало, а внизу – дальнейшая эволюция хаотического движения малой планеты вокруг двух светил с равной массой

Каждая из перечисленных выше проблем (обмена, захвата и т.п.) представляла собой задачу большой трудности. В них (как писал Владимир Михайлович Алексеев) затрагивались проблемы, «возникающие в областях, где математика и механика граничат с философией: происхождение Солнечной системы, эволюция звездных скоплений и т.п.». В настоящее время проблема финальных движений полностью решена. В 1953 году К.А.Ситников доказал возможность частичного захвата, в 1959 году он же построил пример осцилляции. Возможность остальных финальных движений была доказана В.М.Алексеевым.

Решение задачи о финальных движениях потребовало разработки новых методов в теории динамических систем. Одно из крупнейших открытий в теории дифференциальных уравнений, имеющих грандиозные последствия для всей математики, состоит в том, что во многих динамических системах (т.е. системах, эволюция которых описывается дифференциальными уравнениями), несмотря на их полную детерминированность (когда будущее предопределяется настоящим), могут возникать движения, напоминающие случайные процессы. Это явление получило название «детерминированного хаоса». Истоки идеологии детерминированного хаоса относятся еще к началу века. Тогда в трудах Ж.Адамара, Дж.Биркгофа, Э.Хопфа, А.Пуанкаре и других было обнаружено возникновение хаотических свойств в процессах, определяемых дифференциальными уравнениями. В таких динамических системах имеется сильная неустойчивость, когда малые возмущения начальных условий приводят к большим отклонениям. К числу задач, для которых характерно явление детерминированного хаоса, относится все та же задача трех тел. С одной стороны, несомненно, что ньютонова механика позволяет вычислять траектории космических кораблей, комет и планет с большой точностью и на большие времена, но, с другой стороны, при огромных длительностях времени траектории их движения становятся непредсказуемыми (см. рис.1).

Фракталы

В восьмидесятые годы были раскрыты и другие грани непредсказуемости, связанные с динамически-