Как линейкой измерить длину волны лазерного излучения?

В.МОЖАЕВ

Судя по названию статьи ясно, что речь будет идти о волновых свойствах света. Волновые представления используются при описании таких хорошо известных физических явлений, как интерференция и дифракция света. С этими явлениями тесно связано очень важное понятие когерентности волн.

Пусть в некоторую точку пространства от двух источников приходят два монохроматических волновых возмущения с одинаковой длиной волны λ. Если источник *1* находится на расстоянии r_1 от точки наблюдения, а источник *2* – на расстоянии r_2, то зависимость, например для электромагнитной волны, напряженности электрического поля в данной точке, создаваемой обеими электромагнитными волнами, будет иметь вид

$$E(t) = E_{01}\cos(\omega t - kr_1) + E_{02}\cos(\omega t - kr_2),$$

где E_{01} и E_{02} – амплитуды напряженностей электромагнитных волн, $\omega = 2\pi c/\lambda$ – их круговая частота, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число (считаем, что начальные фазы волн совпадают). Происходит сложение двух колебаний, сдвинутых по фазе на величину $\Delta\varphi = (\omega t - kr_1) - (\omega t - kr_2) = k(r_2 - r_1)$. Два колебания считаются когерентными, если за время наблюдения разность фаз $\Delta\varphi$ остается постоянной. В этом случае амплитуда E_0 результирующего колебания зависит от $\Delta\varphi$ и остается неизменной за время наблюдения:

$$E_0 = \sqrt{E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos\Delta\varphi}.$$

К сожалению, монохроматическая волна – это чисто математическое понятие, такие волны не имеют физического смысла, их нет в природе. (Наиболее близкие к монохроматическим волны излучают оптические квантовые генераторы, т.е. лазеры.) Нет в природе и когерентных источников, т.е. источников, излучающих когерентные волны. В различных оптических схемах для получения интерференционной картины в качестве когерентных источников обычно используют два мнимых источника, полученных от одного действительного, или один действительный, а другой – его мнимое изображение.

А теперь перейдем к рассмотрению конкретных оптических схем.

Задача 1. *Любую оптическую схему по наблюдению интерференционной картины можно представить в упрощенном виде, изображенном на рисунке 1. Два точечных когерентных источника S_1 и S_2, излучающих свет с длиной волны λ, находятся на расстоянии d друг от друга. На расстоянии L от источников расположен экран. Определите ширину интерференционных полос при условии, что $d \ll L$.*

Очевидно, что интерференционная картина в плоскости рисунка 2 симметрична относительно начала координат ($z = 0$).

Пусть координата m-го максимума интенсивности равна z_m. Это означает, что в точку с координатой z_m от источников S_1 и S_2 приходят волны с оптической разностью хода, равной $m\lambda$, где m – некоторое целое число, т.е.

$$r_2 - r_1 = m\lambda.$$

Из рисунка 2 находим

$$r_2 = \sqrt{L^2 + \left(\frac{d}{2} + z_m\right)^2},$$

$$r_1 = \sqrt{L^2 + \left(z_m - \frac{d}{2}\right)^2}.$$

С учетом того, что $d/2 + z_m \ll L$, можно записать

$$r_2 = L\sqrt{1 + \left(\frac{d/2 + z_m}{L}\right)^2} \approx L + \frac{(d/2 + z_m)^2}{2L},$$

$$r_1 = L\sqrt{1 + \left(\frac{z_m - d/2}{L}\right)^2} \approx L + \frac{(z_m - d/2)^2}{2L},$$

откуда

$$r_2 - r_1 \approx \frac{dz_m}{L}.$$

В этом приближении условие того, что максимуму m-го порядка соответствует координата z_m, имеет вид

$$\frac{dz_m}{L} = m\lambda.$$

Аналогично, для соседнего максимума $(m+1)$-го порядка запишем

$$\frac{dz_{m+1}}{L} = (m+1)\lambda,$$

где z_{m+1} – координата максимума $(m+1)$-го порядка.

Ширина интерференционных полос Δx – это расстояние между двумя соседними максимумами, т.е.

$$\Delta x = z_{m+1} - z_m = \frac{\lambda L}{d} = \frac{\lambda}{\psi},$$

где $\psi = d/L$ – угол сходимости интерферирующих лучей.

Приведем без вывода точное выражение для ширины интерференционных полос:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\sin(\psi/2)}.$$

(Окончание см. на с. 34)

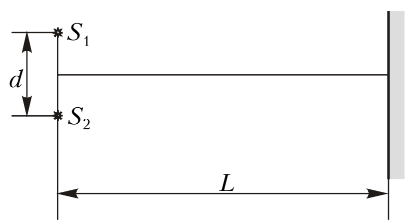

Рис. 1

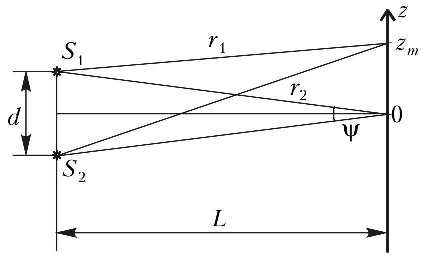

Рис. 2

(Начало см. на с. 34)

При малых углах сходимости оно переходит в полученное ранее приближенное выражение.

Задача 2. *От двух когерентных источников света S_1 и S_2 получена система интерференционных полос на экране AB, удаленном от источников на a = 2 м (рис.3). Расстояние между источниками $d \ll a$. Во сколько раз изменится ширина интерференционных полос, если между источниками и экраном поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием F = 25 см? Рассмотрите два случая: расстояние линзы от источников равно 2F; источники находятся в фокальной плоскости линзы.*

Решение этой задачи будем основывать на выражении, полученном для ширины интерференционных полос в предыдущей задаче.

В отсутствие линзы угол сходимости интерферирующих лучей ψ мал и ширина интерференционных полос

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\psi} = \frac{\lambda a}{d}.$$

Если собирающая линза расположена на расстоянии $2F$ от источников, когерентными источниками, создающими на экране AB интерференционную картину, являются два действительных изображения S_1' и S_2' (рис.4). Очевидно, что расстояние между этими источниками также равно d, а угол сходимости равен $\psi_1 = d/(a-4F)$. Ширина интерференционных полос в

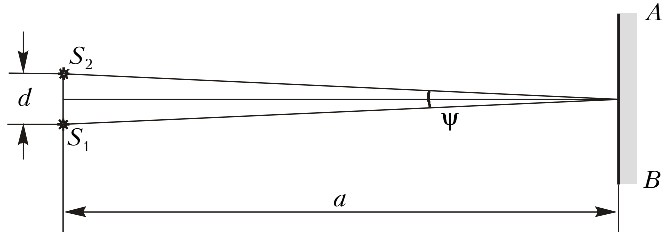

Рис. 3

этом случае будет

$$\Delta x_1 = \frac{\lambda}{\psi_1} = \frac{\lambda(a-4F)}{d},$$

а отношение ширин полос –

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x} = \frac{a-4F}{a} = \frac{1}{2},$$

т.е. ширина полос уменьшится в два раза.

Если источники S_1 и S_2 будут находиться в фокальной плоскости линзы, когерентные источники S_1' и S_2' будут мнимыми и расположенными на бесконечности слева от линзы на продолжении прямых S_1O и S_2O (рис.5). На экран AB будут падать два параллельных пучка лучей с углом сходимости $\psi_2 = d/F$. Ширина интерференционных полос будет

$$\Delta x_2 = \frac{\lambda}{\psi_2} = \frac{\lambda F}{d},$$

а отношение ширин полос –

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x} = \frac{F}{a} = \frac{1}{8},$$

т.е. в этом случае ширина полос уменьшится в 8 раз.

Задача 3. *В интерференционной схеме используется квазимонохроматический источник света с длиной волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см. Отражающие зеркала расположены симметрично относительно источника S и экрана Э, на котором наблюдается интерференционная картина (рис.6). Найдите: 1) ширину интерференционных полос Δx на экране; 2) область локализации полос на экране; 3) максимальный и минимальный порядки интерференции и число наблюдаемых полос. Параметры схемы: L = 1 м, 2d = 2,5 см, D = 10 см.*

1) В данной интерференционной схеме когерентными источниками являются два мнимых изображения источника S в отражающих зеркалах. На рисунке 7 это источники S' и S''. Угол сходимости интерферирующих лучей равен углу $S'OS''$ и составляет

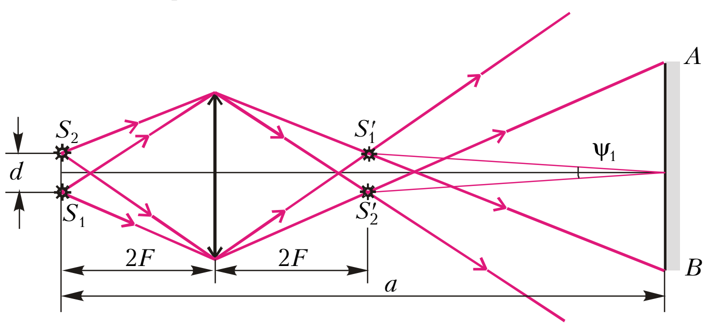

Рис. 4

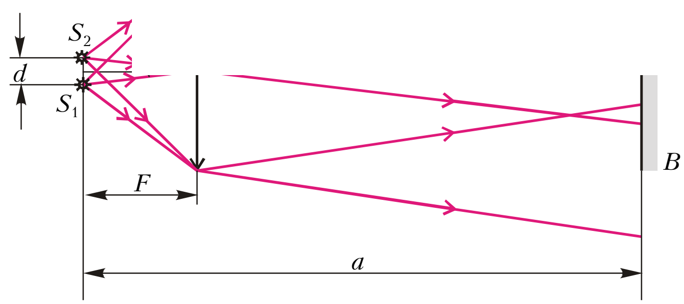

Рис. 5

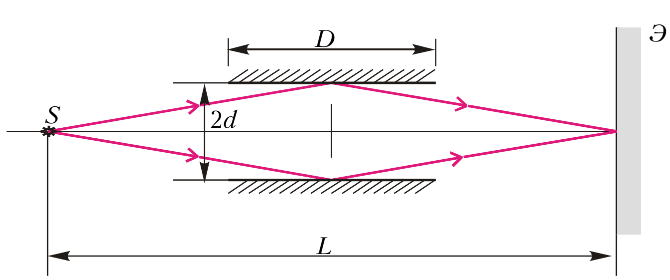

Рис. 6

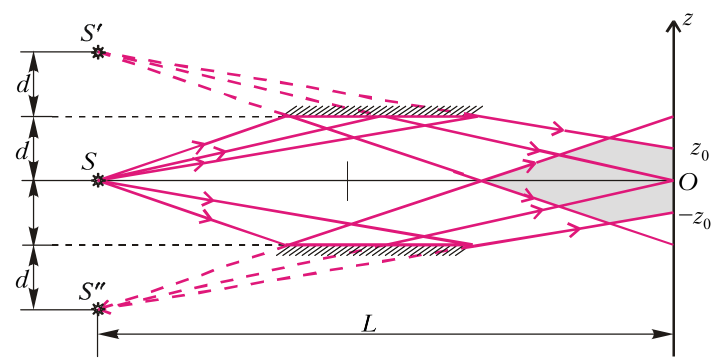

Рис. 7

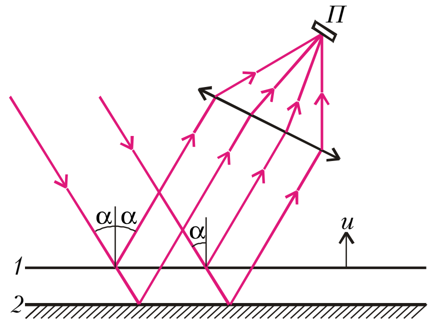

Рис. 8

$\psi = 4d/L$. Ширина интерференционных полос равна

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\psi} = \frac{\lambda L}{4d} = 10^{-3}\ \text{см}.$$

2) Область локализации полос на экране определяется областью пересечения интерферирующих пучков:

$$|z| \le z_0,\ \text{где}\ z_0 = \frac{2dD}{L+D} = 0{,}227\ \text{см}.$$

3) Интерференционная картина на экране будет симметричной относительно начала координат ($z = 0$). Непосредственно в начале координат будет находится максимум нулевого порядка ($m = 0$) – это и будет минимальный порядок интерференции. Максимальный же порядок интерференции будет иметь место при $z = \pm z_0$:

$$m_{\max} = \frac{z_0}{\Delta x} = \frac{8d^2 D}{\lambda L(L+D)} = 227.$$

Полное число наблюдаемых полос будет

$$N = 2m_{\max} = 454.$$

Задача 4. *Параллельный пучок квазимонохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм падает под углом $\alpha = 30°$ на систему из двух плоскопараллельных зеркал 1 и 2 (рис.8). Часть светового пучка отражается от полупрозрачного зеркала 1, а оставшаяся часть полностью отражается от неподвижного зеркала 2. Система волн, отраженных от обоих зеркал, с помощью собирающей линзы фокусируется на приемник П, который расположен в фокальной плоскости линзы. Сигнал приемника пропорционален интенсивности падающего на него света. Какова будет частота переменного сигнала приемника в случае плоскопараллельного перемещения зеркала 1 со скоростью $u = 0{,}01$ см/с?*

Рассмотрим произвольный момент времени. Пусть координата зеркала 1

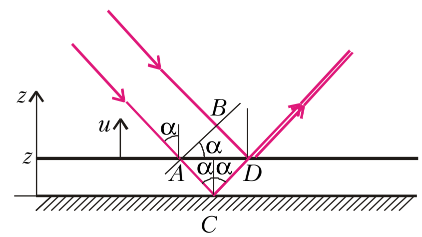

Рис. 9

относительно зеркала 2 равна z (рис.9). Найдем в этот момент оптическую разность хода Δ между двумя волнами, одна из которых – отраженная от зеркала 1, а другая – отраженная от зеркала 2 и прошедшая зеркало 1. Прямая AB является волновым фронтом (линией постоянной фазы) падающей волны в некоторый произвольный момент времени. Расстояние этого фронта до точки D, где произойдет отражение, равно отрезку BD, а расстояние, которое нужно пройти этому фронту до точки D после отражения от зеркала 2, равно сумме длин отрезков AC и CD. Очевидно, что оптическая разность хода между волнами равна

$$\Delta = AC + CD - BD.$$

Из рисунка 9 находим

$$AC = CD = \frac{z}{\cos\alpha},$$

$$BD = AD\sin\alpha = 2z\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin\alpha = \frac{2z\sin^2\alpha}{\cos\alpha},$$

откуда

$$\Delta = \frac{2z}{\cos\alpha} - \frac{2z\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = 2z\cos\alpha.$$

Приемник будет регистрировать максимальный сигнал, когда

$$2z\cos\alpha = m\lambda,\ \text{где}\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Между двумя соседними максимумами сигнала зеркало 1 пройдет расстояние $\delta z = \lambda/(2\cos\alpha)$. Время прохождения зеркалом 1 этого расстояния, или период переменного сигнала приемника, будет

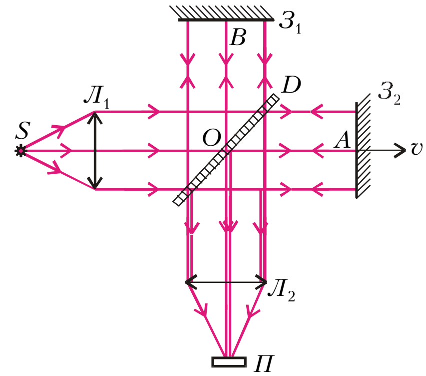

Рис. 10

$$T = \frac{\delta z}{u} = \frac{\lambda}{2u\cos\alpha},$$

а частота сигнала –

$$f = \frac{1}{T} = \frac{2u\cos\alpha}{\lambda} = 346\ \text{Гц}.$$

Задача 5*. *Для исследования спектрального состава излучения источника используется интерферометр Майкельсона (рис.10). Точечный источник S расположен в фокальной плоскости линзы $Л_1$. Слаборасходящийся пучок света разделяется делителем D на два одинаковых по интенсивности пучка. Один из них (отраженный от делителя) направляется на неподвижное зеркало $З_1$, а второй после прохода делителя идет к зеркалу $З_2$, которое перемещается со скоростью $v = 6 \cdot 10^{-5}$ мм/с. После отражения от зеркал и последующего взаимодействия с делителем образуются два когерентных пучка, которые с помощью линзы $Л_2$ собираются на фотоприемник П. Ток фотоприемника пропорционален интенсивности падающего на него излучения. На рисунке 11 показан график изменения фототока приемника, когда излучение источника содержит две близкие спектральные линии одинаковой интенсивности с длинами волн λ_1 и λ_2 ($\lambda_2 - \lambda_1 \ll \lambda_1$). Определите значения этих длин волн.*

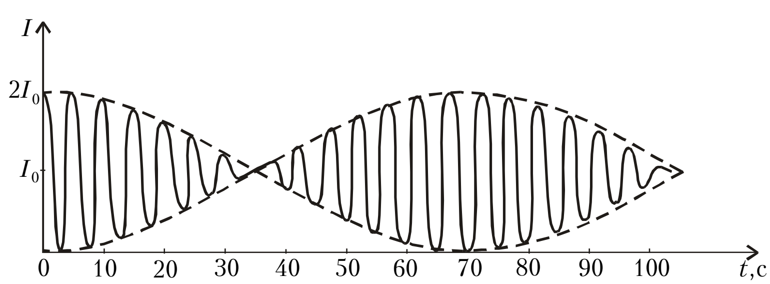

Рис. 11

Рассмотрим квазимонохроматическое излучение с длиной волны λ_1. Пусть интенсивность этого излучения равна I_0. Очевидно, что интенсивность каждого из двух когерентных пучков, фокусируемых линзой $Л_2$ на фотоприемник, равна $I_0/4$. Если в данный момент времени длины плеч интерферометра (расстояния от делителя до зеркал) равны OA и OB, то разность хода между нашими двумя волнами составляет $\delta = 2(OA - OB)$, где множитель «2» учитывает распространение волны к зеркалу и обратно, фазовый сдвиг равен $\Delta\varphi = 2\pi\delta/\lambda_1$, суммарная интенсивность этих волн равна

$$I_1(t) = \frac{I_0}{4} + \frac{I_0}{4} + 2\frac{\sqrt{I_0}}{2}\frac{\sqrt{I_0}}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}\delta\right) = \frac{I_0}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}\delta\right)\right).$$

Введем обозначения: $\lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\bar{\lambda}$, откуда $\lambda_1 = \bar{\lambda} - \Delta\lambda/2$, $\lambda_2 = \bar{\lambda} + \Delta\lambda/2$, где $\bar{\lambda}$ – средняя длина волны. После подстановки выражения для λ_1 суммарная интенсивность $I_1(t)$ будет

$$I_1(t) = \frac{I_0}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\bar{\lambda} - \Delta\lambda/2}\right)\right) \approx \frac{I_0}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\bar{\lambda}} + \frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\bar{\lambda}^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{2}\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\bar{\lambda}}\right)\cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\bar{\lambda}^2}\right) - \frac{I_0}{2}\sin\left(\frac{2\pi\delta}{\bar{\lambda}}\right)\sin\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\bar{\lambda}^2}\right).$$

Аналогично, для излучения с длиной волны λ_2 получим

$$I_2(t) = \frac{I_0}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda + \Delta\lambda/2}\right)\right) \approx \frac{I_0}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\bar{\lambda}} - \frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\bar{\lambda}^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{2}\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\bar{\lambda}}\right)\cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\bar{\lambda}^2}\right) + \frac{I_0}{2} + \sin\left(\frac{2\pi\delta}{\bar{\lambda}}\right)\sin\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\bar{\lambda}^2}\right).$$

Суммарная интенсивность света на приемнике от излучений с обеими длинами волн будет

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t) = I_0 + I_0\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\bar{\lambda}}\right)\cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\bar{\lambda}^2}\right).$$

Первый переменный сомножитель во втором члене этого выражения описывает высокочастотное периодическое колебание фототока, а второй сомножитель соответствует низкочастотной огибающей. По графику зависимости $I(t)$ находим, что период высокочастотных колебаний равен $T = 5$ с. За это время разность хода δ изменяется на $\bar{\lambda}$, что соответствует перемещению подвижного зеркала на $\bar{\lambda}/2$. Расстояние, пройденное зеркалом за время T, очевидно, равно Tv. Таким образом,

$$\frac{\bar{\lambda}}{2} = Tv, \text{ откуда}$$

$$\bar{\lambda} = 2Tv = 6 \cdot 10^{-5} \text{ см} = 600 \text{ нм}.$$

Как мы уже отмечали, функция $\cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\bar{\lambda}^2}\right)$ описывает огибающую высокочастотного сигнала. Из рисунка 11 можно найти, что за время, равное $14T$, фаза изменяется на π, а разность хода – на $\bar{\lambda}^2/\Delta\lambda$. Подвижное зеркало проходит за это время в два раза меньшее расстояние. Итак,

$$\frac{\bar{\lambda}^2}{2\Delta\lambda} = 14Tv, \text{ откуда}$$

$$\Delta\lambda = \frac{\bar{\lambda}^2}{28Tv} \approx 43 \text{ нм}.$$

Таким образом, длины волн спектральных линий равны, соответственно,

$$\lambda_1 = \bar{\lambda} - \frac{\Delta\lambda}{2} = 578{,}5 \text{ нм},$$

$$\lambda_2 = \bar{\lambda} + \frac{\Delta\lambda}{2} = 621{,}5 \text{ нм}.$$

Задача 6. *На физической олимпиаде, проходившей в Московском физико-техническом институте в 1998 году, школьникам была предложена такая экспериментальная задача: с помощью штангенциркуля измерить длину волны лазерного излучения. В качестве лазера использовался миниатюрный твердотельный квантовый генератор. Один из участников олимпиады собрал экспериментальную установку, изображенную на рисунке 12. На горизонтальной поверхности стола, примыкающего к вертикальной стене комнаты, лежит штангенциркуль Ш. Излучение лазера Л, укрепленного на штативе, падает поперек миллиметровым рискам штангенциркуля. На миллиметровой бумаге, закрепленной на стене, наблюдается система дифракционных максимумов в виде светлых горизонтальных линий. Были проведены три замера: высота самой яркой линии (луч 1)* h_0 *= 31 мм, высота шестого дифракционного максимума (луч 2)* h_6 *= = 68 мм и расстояние L = 695 мм. По этим данным определите длину волны лазерного излучения.*

Идея решения задачи понятна: использовать штангенциркуль с нанесенными на нем миллиметровыми рисками в качестве отражательной дифракционной решетки. Диаметр светового пучка лазера на расстоянии 1 м составляет ~4 мм, поэтому для увеличения числа рисок, освещаемых падающим пучком света, угол падения φ_0 должен быть близок к $\pi/2$.

Рассмотрим ход лучей, рассеянных на двух соседних рисках (рис.13). Расстояние между соседними штрихами (постоянная решетки) d = 1 мм. Обозначим угол падения лучей *1* и *2* через φ_0, а угол отражения лучей *1ʹ* и *2ʹ* – через φ_m, и пусть угол φ_m соответствует направлению на m-й дифракционный максимум. Разность хода лучей *1*,*1ʹ* и *2*,*2ʹ* равна

$$\Delta = d\sin\varphi_0 - d\sin\varphi_m.$$

Если угол φ_m соответствует направлению на m-й главный дифракционный максимум, то $\Delta = m\lambda$, где λ – длина волны света. Таким образом,

$$d\sin\varphi_0 - d\sin\varphi_m = m\lambda,$$

где m = 0, 1, 2...

Очевидно, что направление на максимум нулевого порядка ($m = 0$) имеет место при $\varphi_m = \varphi_0$, т.е. когда происходит зеркальное отражение. Если высота расположения максимума h_0, то

$$\sin\varphi_0 = \frac{L}{\sqrt{L^2 + h_0^2}}.$$

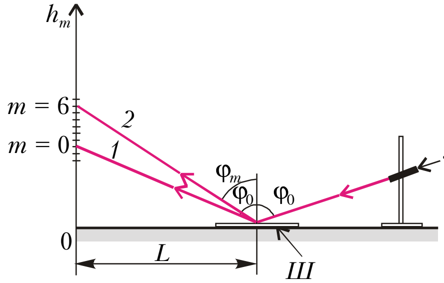

Рис. 12

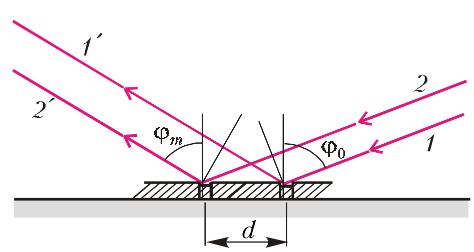

Рис. 13

Для высоты расположения максимума шестого порядка ($m = 6$)

$$\sin\varphi_6 = \frac{L}{\sqrt{L^2 + h_6^2}}.$$

Условие направления на главные дифракционные максимумы позволяет определить длину волны света:

$$\lambda = \frac{dL}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{L^2 + h_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + h_6^2}}\right).$$

Поскольку h_0 и h_6 много меньше L, можно записать

$$\lambda \approx \frac{d\left(h_6 - h_0\right)\left(h_6 + h_0\right)}{12L^2} = 632 \text{ нм}.$$

С учетом погрешностей измерений окончательно получим

$$\lambda = (630 \pm 50) \text{ нм}.$$

Упражнения

1. Из линзы с фокусным расстоянием $F = 50$ см вырезана центральная часть шириной a, как показано на рисунке 14. Обе половины линзы сдвинуты до соприкосновения. По одну сторону линзы помещен точечный источник света с длиной волны $\lambda = 600$ нм. С противоположной стороны линзы находится экран, на котором наблюдаются интерференционные полосы. Расстояние между соседними светлыми полосами равно $\Delta x = 0{,}5$ мм и не изменяется при перемещении экрана вдоль оптической оси. Найдите a.

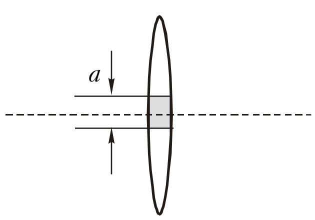

Рис. 14

2. В интерференционной схеме, изображенной на рисунке 15, на бипризму Френеля падает параллельный пучок квазимонохроматического света с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Пучки света, преломленные каждой из половинок бипризмы, интерферируют между собой. При каком расстоянии L между бипризмой и экраном P на нем будет наблюдаться интерференционная картина максимального размера? Чему будет при этом равна ширина интерференционных полос? Какое количество светлых полос будет наблюдаться на экране в этом случае? Расстояние между вершинами бипризмы $2a = 5$ см, показатель преломления материала бипризмы $n = 1{,}5$, преломляющий угол $\alpha = 10^{-3}$ рад. Считать, что $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha = \alpha$.

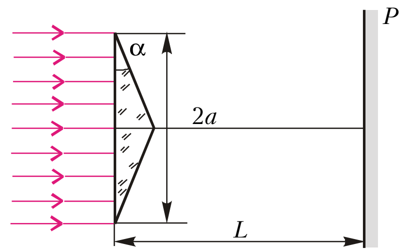

Рис. 15

3. Интерферометр Рэлея (рис.16) используется для относительного измерения показателя преломления газов. Для этого на пути одного из интерферирующих лучей располагается кювета $Г$ прямоугольной формы длиной $L = 10$ см с исследуемым газом, а на пути другого луча – компенсатор K, с помощью которого добиваются, чтобы в центральном максимуме разность хода между лучами равнялась нулю. Чему равно относительное изменение показателя преломления азота, по отношению к воздуху, если после замены в кювете воздуха на азот интерференционная картина в плоскости наблюдения P сместилась ровно на одну полосу? Измерения проводились на длине волны $\lambda = 500$ нм.

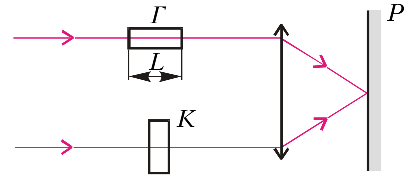

Рис. 16

4. Точечный источник света S расположен на расстоянии $L = 1$ м от тонкой слюдяной пластинки толщиной $h = 0{,}1$ мм с показателем преломления $n = 1{,}4$ (рис.17). На таком же расстоянии от пластинки расположен небольшой экран $Э$, ориентированный перпендикулярно отраженным лучам, на котором наблюдаются интерференционные полосы. Угол $\varphi = 60°$. Найдите порядок m интерференционной полосы в центре экрана. Определите ширину интерференционных полос. Длина волны света $\lambda = 560$ нм.

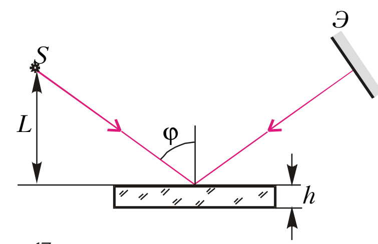

Рис. 17