Кеплер и винные бочки – австрийские и рейнские

А.СПИВАК, В.ТИХОМИРОВ

По обычаю да и просто по совести журнал, если на его страницах появилась ошибка, обязан безотлагательно ее исправить. Так вот, в восьмом номере «Кванта» за 1986 год была опубликована статья «Секрет Старого Бондаря», основной результат которой неверен. А обнаружилось это только сейчас, 14 лет спустя!

Публикация ошибочной статьи – происшествие для нашего журнала чрезвычайно редкое. Интересно выяснить, как это произошло. И почему ошибку обнаружили не сразу? Да, собственно, о чем речь?

Речь пойдет, в сущности, о книге Иоганна Кеплера (1571–1630) «Новая стереометрия винных бочек, преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму и исключительно удобное употребление для них кубической линейки, с присоединением дополнения к архимедовой стереометрии». В этой книге рассмотрены не только винные бочки, но и многие другие тела – айва, лимоны, яблоки, оливки, груши, тыквы, веретена, опухоли, обравненные кучи зерен, венки сельских девушек, прорезающиеся рога,… Например, *лимон* по Кеплеру – это тело, полученное вращением меньшей части круга, отсеченной хордой, вокруг этой хорды (рис.1). *Яблоко*,

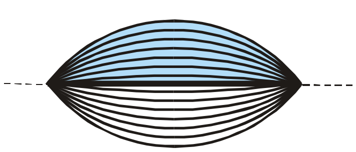


Рис.1

Иллюстрация В.Власова

как вы, наверное, догадались, образуется при вращении большей части круга (рис.2). (Заметьте: шар – это и яблоко, и лимон одновременно!) Кеплер рассматривает и *эллиптическую сливу*, полученную вращением эллипса вокруг его большой оси (рис.3), и *пояс яблока*, полученный вырезанием из яблока его сердцевины, т.е. цилиндра, ось которого

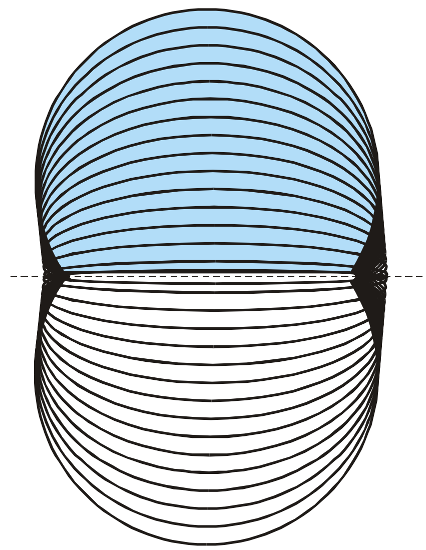


Рис.2

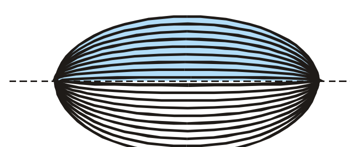


Рис.3

совпадает с осью вращения (рис.4), и многие другие тела вращения.

Не стоит удивляться терминам «лимон», «яблоко», «слива». Они естественны для Кеплера, который обладал живостью ума и языка.[1] Удивительно другое: сколь многим математика обязана винным бочкам, подвигшим Кеплера вычислять объемы и площади поверхностей тел

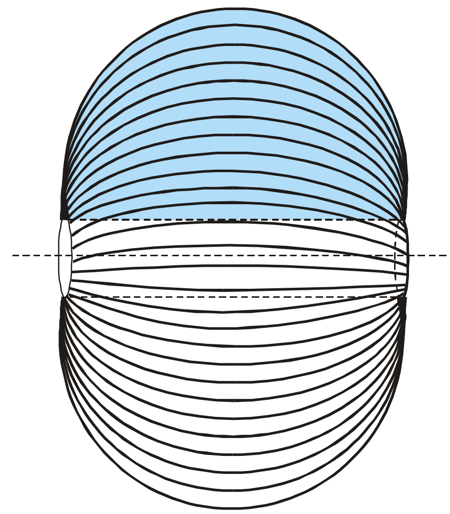


Рис.4

вращения, а также решать задачи на максимум и минимум. О нескольких таких задачах, в частности о той, которой была посвящена статья «Секрет Старого Бондаря», рассказано в этой статье.[2] Некоторые другие – те, что привели к замечательным формулам, известным ныне как формулы Гюльдена,– мы обсудим в одном из ближайших номеров журнала.

Вступление

Я небеса измерял;
ныне тени земли измеряю.
Дух на небе мой жил;
здесь же тень тела лежит.

Неизвестно, была ли написана на могильной плите Кеплера эта сочиненная им самим эпитафия.[3] Неиз-

[1] *Да и откуда ему было знать, какие термины приживутся, а какие нет? Вы можете объяснить, например, почему слова «корень» и «дерево» стали терминами, а слово «лимон» – не стало?*

[2] *А также о реактивных самолетах, о временах года, о связи винных бочек с астрономией. Главное – не торопитесь заглядывать в конец: лучше не перепрыгивать через страницы и века, а мудро пройти весь путь.*

[3] *Могила – а Кеплер умер в Регенсбурге (Германия) – не сохранилась.*

вестно и то, так ли все было в действительности, как он рассказал в предисловии к «Новой стереометрии…». Но история настолько хороша, что ее с удовольствием пересказывают, приукрашивая или сокращая, очень многие историки. Не откажем и мы себе в удовольствии услышать ее из уст автора.

«В ноябре прошлого года,… государи мои милостивые, я ввел в свой дом новую супругу в то время, когда Австрия, закончив обильный сбор благородного винограда, распределяла свои богатства, разослав вверх по Дунаю нагруженные баржи, в нашем Норике и весь берег в Линце был завален винными бочками, продающимися по сходной цене. Согласно обязанностям супруга и доброго отца семейства, мне пришлось позаботиться о необходимом для дома напитке. Поэтому ко мне на дом было принесено и поставлено несколько бочек, а через четыре дня пришел продавец с измерительной линейкой, с помощью которой и промерил подряд все кадки, без различия, не обращая внимания на форму, без всяких соображений и вычислений.»

Продавец измерял расстояние d от наливного отверстия до нижней точки днища (рис.5) и «объявлял количество амфор, вмещаемых бочкой, заметив число, поставленное на линейке в том месте, на котором оканчивалась названная длина…».

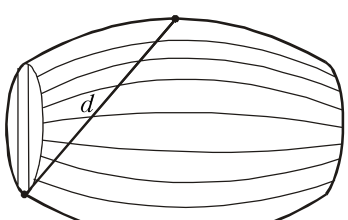


Рис.5

Кеплер удивился, как с помощью одного измерения можно узнать вместимость – ведь бочки бывают разной формы! Он вспомнил «нудное измерение, применяемое на Рейне, где либо, не боясь скучной потери времени, наполняют бочки, отсчитывая количество амфор, и выжигают на измеренном сосуде его вместимость, либо если и пользуются измерительной линейкой, то вымеряют как можно больше поперечных кругов и длину изогнутых клепок[4] и перемножают их между собой, а кроме того, принимают меры предосторожности, касающиеся неравенства между днищами, величины пуза и кривизны клепок, и все-таки не вполне всех удовлетворяют: так, одни указывают одни ошибки, а другие – другие».

Далее Кеплер пишет: «Когда же я узнал, что такое употребление поперечной линейки установлено здесь общественными властями и измерители ручаются за его правильность, то я, как новобрачный, счел для себя подходящим взять новый предмет математических занятий и исследовать геометрические законы такого удобного и крайне необходимого в домашнем хозяйстве измерения и выяснить его основания, если таковые имеются».

Что такое бочка?

В каждый данный момент существует лишь тонкий слой между «тривиальным» и недоступным. В этом слое и делаются математические открытия. Заказная прикладная задача поэтому в большинстве случаев или решается тривиально, или вообще не решается…

А.Н.Колмогоров

Поставленную перед собой задачу новобрачный решал примерно три дня, после чего «очинил перо для отделки и записи доказательства, готового в уме…». Он не ограничился решением задачи, а начал издалека.

«Всякое искусное и удобное измерение объема требует известной правильности фигуры, ибо объемы сосудов, не имеющих никакой определенной правильной формы, не поддаются соображению и требуют только рук и подсчета влитой жидкости.»

К тому же «… жидкость, долго хранимая в металлических сосудах, портится от ржавчины; стеклянные и глиняные не достаточны по размерам и ненадежны; каменные не подходят для употребления из-за веса,– значит, остается … хранить вина в деревянных. Из одного целого ствола опять-таки нельзя приготовить сосудов достаточно вместительных и в нужном количестве, да если и можно, то они трескаются. Поэтому бочки следует строить из многих соединенных друг с другом кусков дерева. Избегнуть же вытекания жидкости через щели между отдельными кусками нельзя ни при помощи какого-нибудь материала, ни каким-нибудь другим способом, кроме сжимания их связками. Так как эти связки делаются из гибкого материала – березы, дуба и т.п., то под давлением тяжести жидкого вещества, которое ими с силой сжимается, они раздаются по самому вместительному ободу. По этому основному соображению бочары и прибегают к круглым днищам, чтобы, давая на краях иную фигуру, не сделать сосуд перекошенным и непрочным, так как пузо бочки, по сказанному, стремится к круговой форме. Это можно видеть на флягах, в которых через Альпы переносят в Германию итальянские вина. По условиям их употребления они имеют сжатую форму, чтобы их можно было вешать на бока мулов и безопасно переносить через узкие проходы… и вот с той самой стороны, где они более плоски, они хуже выдерживают напор и легче трескаются.

Круговая или цилиндрическая фигура прибавляет еще то удобство, что при перевозке вин на телегах по земле главный вес приходится на вино и наименьший на дерево. На этом основании, если бы из деревянных дощечек можно было сколотить шар, то шарообразные сосуды были бы самыми желательными.[5] Но так как связками доски в шар сжать нельзя, то его место и заступает цилиндр. Но этот цилиндр не может быть вполне правильным, потому что ослабшие связки тотчас же сделались бы бесполезными и не могли бы быть натянуты сильнее, если бы бочка не имела конической фигуры, несколько суживающейся в обе стороны от пуза ее. Эта форма удобна и для качения (отсюда и название цилиндра[6]) и для перевозки на теле-

[4] *Клепки – это доски, составляющие боковую поверхность бочки.*

[5] *Кеплер, вероятно, имеет в виду то, что из всех тел с данной площадью поверхности наибольший объем имеет шар (так же, как среди фигур данного периметра наибольшую площадь имеет круг). Подробнее об этом можно прочитать в книге В. Тихомирова «Рассказы о максимумах и минимумах» (Библиотечка «Квант», вып. 56), в статьях В. Трофимова «Царевна Дидона, изопериметры и мыльные пленки» («Квант» №5 за 1985 г.) и И.Шарыгина «Миф о Дидоне и изопериметрическая задача» («Квант» №1 за 1997 г.), а также в книге Р.Куранта и Г.Роббинса «Что такое математика».*

[6] *Кеплер прав: слово цилиндр произошло от латинского слова cylindrus, которое в свою очередь произошло от греческого κυλινδρος – валик, каток.*

гах, и … является … красивой на взгляд».

В другом месте читаем: «… бочка имеет форму пузатого цилиндра, или, говоря точнее, бочка представляется как бы разделенной на два усеченных конуса, вершины которых, направленные в противоположные стороны, отсечены деревянными днищами бочки, а основание общее, разделяющее конусы и образующее наибольший круг, опоясывающий бочки». Это значит, что Кеплер предлагает такую математическую модель винной бочки: две одинаковые половины, полученные вращением равнобоких трапеций $ABEF$ и $BCDE$ вокруг их общей оси симметрии l

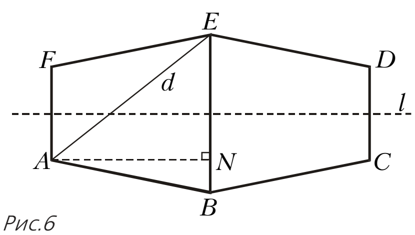


Рис.6

(рис.6). Продавец мерной линейкой измеряет расстояние $d = AE$.

Кубическая шкала

На линейке, которой пользовался продавец вина, пометки были проставлены не так, как на обычной, а по «кубическому закону» (рис.7). Идея очень проста: при увеличении линейных размеров в k раз объем увеличивается в k^3 раз. (В самом деле, в k раз увеличиваются и длина, и ширина, и высота.)[7]

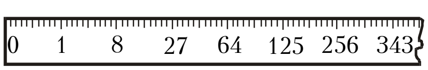


Рис.7

Но как австрийские бочары умудрялись делать бочки абсолютно одинаковой формы (но разного размера)? Можно вообразить, что существовал какой-то австрийский стандарт. Однако кто, как и зачем его изобрел? Этот вопрос весьма интересен, и Кеплер нашел ответ. Но в двух словах тут ничего толком объяснить нельзя. Поэтому мы не будем торопиться и пока скажем лишь, что австрийская бочка – самая вместительная (при фиксированном d) из всех цилиндрических бочек. Это еще не полный ответ (непонятно, почему мерная линейка годится и для бочек, которые чуть шире или чуть уже стандартных), но это уже кое-что!

Австрийская бочка

Непузатые цилиндрические бочки более удлиненной или более укороченной формы, чем австрийские, вместительны менее последних.

И. Кеплер

Теорема V второй части «Новой стереометрии…» утверждает, что из всех цилиндров, вписанных в данный шар, наибольший объем имеет тот, высота h которого в $\sqrt{2}$ раз больше радиуса r основания этого цилиндра. Мы не будем пересказывать здесь рассуждение Кеплера, который не владел лишь нарождавшейся в его время алгеброй и потому не использовал никаких формул (кроме многочисленных пропорций), а применим для доказательства современные обозначения и алгебраические методы.

Обозначим диаметр шара буквой d (рис.8). По теореме Пифагора, $d^2 = h^2 + (2r)^2$. Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту:

$$V = \pi r^2 h = \pi \frac{d^2 - h^2}{4} h = \frac{\pi}{4} d^3 \left(1 - x^2\right) x,$$

где использовано обозначение $x = h/d$. Таким образом, мы должны найти максимальное значение функции $y = x - x^3$ на интервале $(0;\ 1)$. График этой функции (даже на большей области определения) изображен на рисунке 9.

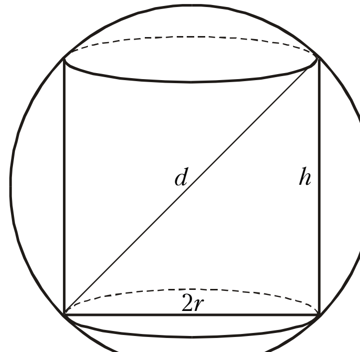


Рис.8

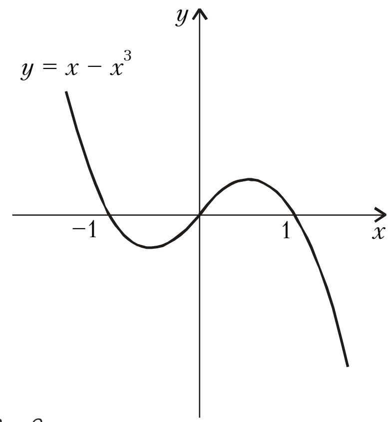


Рис.9

Проще всего найти точку максимума тому, кто умеет вычислять производные (и знает, что для нахождения максимума надо выбрать наибольшее из значений в тех точках, где производная равна нулю или не существует, а также в концах отрезка):

$$y' = 1 - 3x^2,$$

производная равна нулю при $x = \pm 1/\sqrt{3}$. Внутри отрезка $[0;\ 1]$ производная равна нулю лишь при $x = 1/\sqrt{3}$; на концах функция равна нулю. Поэтому наибольшее значение функция принимает при $x = 1/\sqrt{3}$ (при этом, заметьте, $h = d/\sqrt{3}$ и $r = \sqrt{\left(d^2 - h^2\right)/4} = d/\sqrt{6}$, так что $h/r = \sqrt{2}$), а максимальное значение объема цилиндрической бочки равно

$$2V = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} d^3.$$

Можно обойтись и без производных. Например, выполнить замену переменной $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} + t$. Тогда $t \in \left[-1/\sqrt{3};\ 1 - 1/\sqrt{3}\right]$ и

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} + t - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + t\right)^3 = \frac{2}{3\sqrt{3}} - t^2\sqrt{3} - t^3.$$

При $t > 0$ имеем $y < 2/\left(3\sqrt{3}\right)$. При $t \in \left[-1/\sqrt{3};\ 0\right)$, очевидно, $-t^2\sqrt{3} - t^3 = -t^2\left(\sqrt{3} + t\right) < 0$, так что неравенство $y < 2/\left(3\sqrt{3}\right)$ выполнено и в этом случае. Как видите, доказа-

---

[7] *Прочитав рукопись этой статьи, В.В.Произволов вспомнил, как однажды в редакцию журнала «Доклады Академии наук» один биолог принес статью, где опытным путем доказывал обнаруженный им закон: объем инфузории пропорционален третьей степени ее длины. Больших трудов стоило убедить этого биолога, что «его» закон верен не только для инфузорий, а для проверки не нужны эксперименты на мухах, крысах, обезьянах, медведях, слонах и китах.*

тельство не очень сложное, но весьма искусственное – непонятно, как мы догадались до замены переменной. (А догадались мы очень просто – приравняли нулю производную!)

Третий, не менее искусственный, способ – воспользоваться неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом.[8] Как известно, если a, b, c – неотрицательные числа, то

$$\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3}.$$

Запишем это неравенство в виде

$$abc \le (a+b+c)^3 / 27$$

и положим $a = 2x$, $b = (1-x)(\sqrt{3}+1)$ и $c = (1+x)(\sqrt{3}-1)$. Тогда $a+b+c = 2\sqrt{3}$, и неравенство принимает вид

$$2x(1-x)(\sqrt{3}+1)(1+x)(\sqrt{3}-1) \le 8/(3\sqrt{3}),$$

откуда

$$x - x^3 \le 2/(3\sqrt{3}).$$

Четвертый способ, надеемся, понравится вам больше. В любой цилиндр можно вписать прямоугольный параллелепипед (рис.10), основание которого – квадрат со стороной длины $r\sqrt{2}$, а высота совпадает с высотой цилиндра. Объем такого параллелепипеда («столба», как его называет Кеплер) равен $2r^2h$, а объем цилиндра, как мы уже говорили,– $\pi r^2 h$. Таким образом, отношение

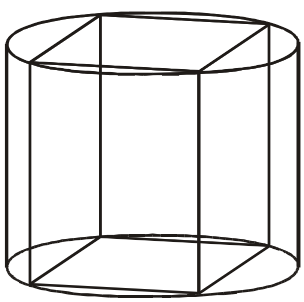


Рис.10

объемов цилиндра и параллелепипеда равно $\pi/2$ и не зависит ни от r, ни от h. Значит, вместо цилиндра можно искать (вписанный в сферу диаметра d) прямоугольный параллелепипед максимального объема!

А теперь – слово Кеплеру: «Теорема IV. Из всех прямоугольных параллелепипедов ... с ... квадратными основаниями, вписанных в одну и ту же сферу, куб имеет наибольший объем». Кеплер, как вы уже знаете, не пользовался алгеброй, отчего его рассуждение растянулось на несколько страниц. Но мы-то с вами знаем неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3,$$

а также неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратичном [9]

$$\frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Если a, b, c – длины ребер прямоугольного параллелепипеда (заметьте – мы даже не требуем, чтобы основание было квадратом), вписанного в шар диаметра d, то

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

и, в силу выписанных выше неравенств,

$$abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \le$$

$$\le \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\right)^3 = \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

Величина $\left(d/\sqrt{3}\right)^3$ – в точности объем куба, вписанного в сферу диаметра d.

Слава австрийским бочарам!

Как мы уже говорили, Кеплер рассуждал иначе, без алгебры. Но ответ у него получился тот же, что и у нас. И когда он получил ответ, то не смог сдержать своего восхищения австрийскими бочарами, которые «как бы по здравому и геометрическому смыслу при построении бочки соблюдают правило, чтобы за радиус днища брать треть длины клепок. Именно, при таком устройстве цилиндр, мысленно построенный между двумя днищами, будет иметь две половины, весьма близко подходящие к условиям теоремы V, и потому будет самым вместительным, хотя бы при постройке бочки от точных правил несколько и отступили, потому что ... по обе стороны от места наибольшего значения убывание вначале нечувствительно... Бочары за длину клепки берут... полуторную величину диаметра основания, что ... дает... приближение к наивместительнейшей фигуре, потому что клепки изгибаются и с обеих сторон выходят за обручи, которые охватывают и сжимают днища, так что излишек в длине против полуторного диаметра основания и приходится на эти выступающие оконечности, которые не принимались во внимание по правилу теоремы V».

Скептик скажет, что для обоснования приближения $\sqrt{2} \approx 3/2$ столь глубокомысленные рассуждения излишни: довольно того, что запомнить число $3/2$ легче, чем 1,41421356237... Но поймите и Кеплера: он желал вызвать у читателя чувство уважения к науке (для этого он рассматривал даже бочки, полученные при вращении дуг эллипсов, гипербол, парабол, ...). И на жизнь он зарабатывал не математическими и даже не астрономическими занятиями, а выпуском календарей, содержащих предсказания всякого рода, и составлением гороскопов, т.е. предсказаний судьбы на основании расположения светил на небе. «Лучше издавать альманахи с предсказаниями,– писал Кеплер,– чем просить милостыню.» «Астрология – дочь астрономии, хотя и незаконная, и разве не естественно, чтобы дочь кормила свою мать, которая иначе могла бы умереть с голоду?»

А менее романтический и более проницательный читатель обратит внимание не на восторги, а на суть дела: «... по обе стороны от места наибольшего значения убывание вначале нечувствительно». Что хотел сказать этим Кеплер?

«Убывание нечувствительно»

Тому, кто еще не знаком с математическим анализом, проще всего объяснить мысль Кеплера, если вспомнить формулу

$$y = \frac{2}{3\sqrt{3}} - t^2\sqrt{3} - t^3.$$

При малых t величины $t^2\sqrt{3}$ и t^3 очень малы. Если, например, $t = 0{,}001$, то $t^2 = 0{,}000001$ и $t^3 = 0{,}000000001$. Эти две величины малы даже по сравнению с (тоже маленькой) величиной t.

---

[8] См., например, статьи Ю.Соловьева «Неравенство Коши» (Приложение к журналу «Квант» №4 за 1994 г.) и О. Ижболдина и Л.Курляндчика «Неравенство Иенсена» («Квант» № 4 за 2000 г.).

[9] Его легко доказать, возведя обе части в квадрат и сведя дело к неравенству $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0$.

А тот, кто изучал анализ, может обойтись и без замены переменной. По определению, для функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x_0, имеет место равенство

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

По определению предела имеем

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)+\alpha(h),$$

где $\alpha(h)$ – бесконечно малая величина, т.е. $\alpha(h)\to 0$ при $h\to 0$. Значит,

$$f(x_0+h) = f(x_0)+f'(x_0)h+\alpha(h)\cdot h. \qquad (*)$$

(Последняя формула настолько важна, что в университетских курсах анализа именно ее берут за определение производной.)

Так что же мы видим? Если $f'(x_0)\neq 0$, то отклонение $f(x_0+h)$ от $f(x_0)$ при малых h почти пропорционально h (величина $\alpha(h)\cdot h$ при $h\to 0$ стремится к нулю быстрее, чем $f'(x_0)h$). Если же $f'(x_0)=0 = 0$, то отклонение равно $\alpha(h)\cdot h$ и стремится к нулю быстрее, чем h. Это значит, что вблизи точки, где производная равна 0, малое изменение аргумента функции сказывается на изменении функции существенно слабее (Кеплер говорит: «нечувствительно»), чем вблизи точки, где производная отлична от 0. Именно по этой причине небольшие отклонения австрийских бочек от стандарта практически не влияли на точность измерения их объема кубической линейкой.

Немного отвлекаясь от темы, заметим, что «нечувствительность изменения» функции вблизи точки, где производная обращается в ноль, является чрезвычайно важным математическим и даже общенаучным фактом. Например, кто из нас не клял нескончаемо длинные зимние ночи? И ведь как они начинаются, так несколько месяцев темень и темень. Ноябрь, декабрь, январь, февраль – короткий день и длинная ночь! Не то обидно, что 22 декабря день очень короток. Обидно, что так обстоит дело не только 22 декабря. Казалось бы, продолжительность дня должна меняться, а она целый месяц практически не меняется!

Но в свой срок приходит весна[10], продолжительность дня довольно быстро возрастает, и, к нашему удовольствию, долго, весь май и все лето, дни длинные, а ночи короткие. «Изменения нечувствительны» не только в точке минимума, но и в точке максимума!

В книге «Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман!» американский физик Ричард Фейнман (1918–1988) рассказывает такую историю: «Когда я был в Массачусетсском технологическом институте, я любил подшучивать над людьми. Однажды в кабинете черчения какой-то шутник поднял лекало (кусок пластмассы для рисования гладких кривых – забавно выглядящая штука в завитушках) и спросил: «Имеют ли кривые на этих штуках какую-либо формулу?». Я немного подумал и ответил: «Несомненно. Это такие специальные кривые. Дайка я покажу тебе.– Я взял свое лекало и начал его медленно поворачивать. – Лекало сделано так, что, независимо от того, как ты его повернешь, в наинизшей точке каждой кривой касательная горизонтальна».

Все парни в кабинете начали крутить свои лекала под различными углами, подставляя карандаш к нижней точке и по-всякому прилаживая его. Несомненно, они обнаружили, что касательная горизонтальна. Все были крайне возбуждены от этого открытия, хотя уже много прошли по математике и даже «выучили», что производная (касательная) в минимуме (нижней точке) для любой кривой равна нулю (горизонтальна). Они не совмещали эти факты. Они не знали даже того, что они уже «знали».

Я плохо представляю, что происходит с людьми: они не учатся путем понимания. Они учатся каким-то другим способом – путем механического запоминания или как-то иначе. Их знания так хрупки!».

А вот еще пример: поведение синуса и косинуса вблизи нуля. Известное равенство

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 1$$

(первый замечательный предел) означает, что при малых x (величина x, разумеется, измеряется в радианах, а не в градусах)

$$\sin x \approx x.$$

Производная функции $\cos x$ в точке $x=0$ равна нулю, поэтому $\cos x$ при малых отклонениях x от нуля «меняется нечувствительно». Точнее,

$$\cos x = \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = 1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\approx 1-\frac{x^2}{2}.$$

Другими словами, если мы рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c (рис.11), где b мало по сравнению с c, то, обозначив буквой x величину угла, противоположного катету b, получим

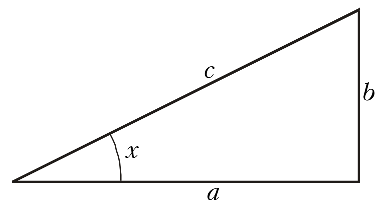


Рис.11

$$x\approx\sin x = \frac{b}{c},$$

$$a = c\cos x\approx c\cos\left(1-\frac{b^2}{2c^2}\right),$$

откуда

$$c-a\approx\frac{b^2}{2c}.$$

Как вы помните, катет b мал по сравнению с гипотенузой. Поэтому последняя формула означает, что катет a отличается от гипотенузы c на величину гораздо меньшую, чем b («нечувствительно», как сказал бы Кеплер).

В статье «Для чего мы изучаем математику?» («Квант» №1/2 за 1993 год) академик В.И.Арнольд в качестве примера важного общематематического факта, «которому, к сожалению, не учат в школе», привел именно последнюю полученную нами формулу. Он подробно разъяснил, что «больший катет вытянутого прямоугольного треугольника практически столь же длинен, как и гипотенуза», и формула дает хорошее приближение для разности их длин.

Дальше мы не будем пересказывать Арнольда, а процитируем: «Например, предположим, что вы возвращаетесь домой по синусоиде (рис.12). Насколько ваш путь длиннее, чем если бы вы шли прямо? Первое впечатление (что вдвое), конечно, преувеличивает длину. Все же кажется, что путь по синусоиде длиннее раза в полтора. На самом деле всего примерно на 20%. Причи-

10 *Производная становится отличной от нуля, сказал бы прозаик.*

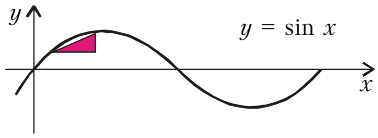


Рис.12

на в том, что бóльшая часть синусоиды слабо наклонена к оси, поэтому соответствующие гипотенузы практически не длиннее катетов.

Вот еще одно применение той же формулы. Реактивные струи первых реактивных двигателей, установленных на крыльях самолета вблизи фюзеляжа, представляли опасность для хвостового оперения. Конструкторы, знавшие и чувствовавшие обсуждаемую формулу, повернули двигатели на небольшой угол α (рис.13).

Хвостовое оперение было спасено (отклонение струи пропорционально α), а результирующая сила тяги

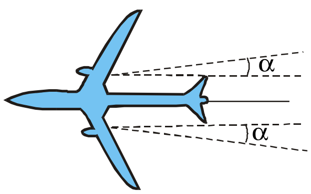
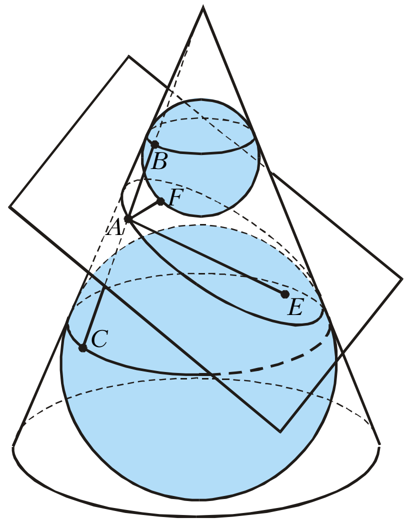


Рис.13

практически не изменилась (потеря $\approx \alpha^2/2$, где α – угол в радианах; для угла в 3° теряется всего порядка 1/800 мощности)».

Впрочем, в XVII веке реактивной авиации еще не было. Вернемся к Кеплеру. Наш последний (и очень важный для астрономии и физики) пример имеет самое непосредственное отношение к открытым им законам движения планет. В только что процитированной статье Арнольда читаем: «Его учитель Тихо Браге в обсерватории «Ураниборг» в течение 20 лет скрупулезно измерял положения планет Солнечной системы. После смерти учителя Кеплер взялся за математическую обработку результатов этих наблюдений и обнаружил, что, например, траектория движения Марса – эллипс.

Эллипс – это геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, постоянна. Тот факт, что сечение конуса плоскостью, достаточно сильно наклоненной к его оси, является эллипсом,– замечательная геометрическая теорема, к сожалению, не доказываемая в школе. Доказательство ее очень просто (рис.14). Вписанные в конус и касающиеся плоскости (в фокусах E и F эллипса) сферы, на рассмотрении которых основано доказательство, называются сферами Данделена.



$$FA + AE = BA + AC = BC$$

Рис.14

Чтобы понять рассуждения Кеплера, нам потребуются некоторые простые факты из геометрии эллипса. Длина большой полуоси эллипса OK (рис.15), обычно обозначаемая через a, равна длине гипотенузы EL треугольника с катетами $b = OL$ (малая полуось) и $c = EO$. Отноше-

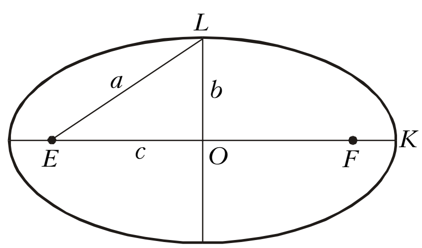


Рис.15

ние c/a характеризует форму эллипса и называется эксцентриситетом, так как пропорционально смещению фокусов от центра эллипса. Эксцентриситет обычно обозначают буквой e.

По теореме Пифагора отношение длин полуосей эллипса есть

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2} \approx 1 - \frac{e^2}{2}$$

при малых e».

Прервем цитату, чтобы пояснить эту формулу. Если вы знакомы с производными, то знаете, что производная функции $f(x) = \sqrt{x}$ равна $1/(2\sqrt{x})$, и можете подставить $x_0 = 1$ и $h = -e^2$ в формулу (*). А если не знакомы, то попросту возведите в квадрат:

$$\left(1 - \frac{e^2}{2}\right)^2 = 1 - e^2 + \frac{e^4}{4} \approx 1 - e^2.$$

Продолжим цитату: «Отсюда видно, что эллипс с малым эксцентриситетом практически неотличим от окружности. Например, если $e = 0{,}1$, то малая ось короче большой всего на 1/200. Для эллипса с длиной большой оси 1 метр малая ось короче большой всего на полсантиметра, так что на глаз отличие такого эллипса от окружности вообще не заметно. Фокусы же смещены от центра на 5 см, что очень заметно...

Сначала Кеплер думал, что орбита Марса – окружность. Однако Солнце оказалось не в центре, а сдвинутым примерно на 1/10 часть радиуса. Но Кеплер не остановился на этом (уже замечательном) результате – потому что он знал теорию конических сечений. Кеплер знал, что эллипс с маленьким эксцентриситетом очень похож на окружность, и проверил, как ведет себя то небольшое отклонение орбиты от окружности, которое еще оставалось...

Орбита Марса оказалась слегка сплюснутой в направлении, перпендикулярном диаметру, на котором лежит Солнце, – примерно на полпроцента, т.е. на $e^2/2$. Так Кеплер пришел к мысли об эллиптических орбитах планет».

Как видите, разница между «чувствительным» и «нечувствительным» изменением существенна не только для австрийской бочкотары, но и для астрономии!

Ошибка, которую не сделал Кеплер

«Рукопись этой книги,– сказано в «Новой стереометрии...»,– пролежала шестнадцать месяцев у аугсбургского книготорговца, и ... вопреки данному мне обещанию не была напечатана.

... С этого времени у меня явилось намерение напечатать эту книжку самому, несмотря на большой недостаток средств. При этом мне представилась возможность не только исправить ее, но и продвинуть в отношении объема сравнительно с первоначально написанной. Не скрою, что на эти размышления было затрачено некоторое время, уделенное от прочих занятий, но я не жалею об этой потере, так как никоим образом невозможно, чтобы пожал плод бессмертия труд, не посеявший некоторого времени.»

Кеплер не скрывает от читателя свои методы и даже заблуждения. Например, доказав, что из всех вписанных в данный круг прямоугольников наибольшую площадь имеет квадрат[11], он признаётся: «Не хочу скрыть ошибки, в которую меня первоначально ввергло поверхностное рассмотрение этой теоремы, ибо это напоминание предупредит читателя, чтобы он остерегался подобных же (заблуждений)». И дальше подробно объясняет, в чем дело, доказывая странную для нынешнего читателя теорему III: «Отношения объемов прямых цилиндров, осевые сечения которых имеют одну и ту же диагональ, не аналогичны[12] отношениям площадей осевых сечений, и при наибольшей площади сечения объем не наибольший».

В другом месте читаем: «Кто, избавившись от заблуждения приписывать наибольший объем тому из цилиндров с данной диагональю, у которого площадь осевого сечения наибольшая, и узнав, что самым вместительным будет по теореме V цилиндр, в котором отношение диаметра основания к высоте равно $\sqrt{2}$,... оказался бы столь проницательным и осторожным, чтобы тотчас не предположить того же самого и об объеме усеченного конуса..? Я же это подумал и держался такого мнения последние полтора года и даже дошел до того, что, опираясь на это основание, считал все рейнские бочки, без различия их пузатости, в отношении емкости ниже австрийских... Поэтому я отношу к пользе, полученной от настоящего печатания, что при подготовке издания геометрия потеребила меня за ухо...».

11 Словами Кеплера: «Осевые сечения прямых цилиндров, имеющих равные диагонали, имеют неравные площади, за исключением того случая, когда у них одинаковые или обратные отношения диаметра основания к высоте; наибольшая площадь среди них у того, который получается от сечения цилиндра с высотой, равной диаметру основания».

12 Т.е. не равны.

А вот редакцию «Кванта» никто не потеребил, когда Кеплеру была приписана ошибка, которую он не сделал. В статье «Секрет Старого Бондаря» читаем: «Обращусь теперь к более общему случаю,– рассуждал Кеплер[13],– когда ... бочку можно с достаточно хорошей точностью представить себе как составленную из двух одинаковых усеченных конусов, состыкованных своими большими основаниями (см. рис.6).

При этом я, конечно, допущу некоторую неточность, но если бочка не очень «пузатая», то погрешность будет незначительной. Затем среди всевозможных бочек, у которых расстояние AE равно заданному d, выберу ту, которая имеет наибольшую вместимость».

Обозначим $AF = 2r$ и $EN = z$, где N – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую BE (см. рис.6). При помощи формулы объема усеченного конуса, которая еще встретится нам в этой статье, можно вычислить объем бочки:

$$V = \frac{2}{3}\pi\left(r^2 + r(z-r) + (z-r)^2\right)\sqrt{d^2 - z^2}.$$

Далее в статье сформулирована задача: «Докажите, ... что среди бочек указанного вида с заданным значением d... наиболее вместимой оказывается цилиндрическая бочка, у которой образующая в $\sqrt{2}$ раз больше диаметра днища».

И 14 лет никто из сотен тысяч читателей не замечал, что утверждение этой задачи ложно! Мы сейчас воспроизведем (с незначительными сокращениями) решение этой задачи из статьи «Секрет Старого Бондаря». Постарайтесь найти ошибку раньше, чем мы ее укажем.

Найдем, при каких значениях переменных r и z емкость бочки V будет – при заданном d – наибольшей. Для этой цели воспользуемся следующей леммой.

Лемма. *Пусть функция $F(r,z)$ при каждом фиксированном (постоянном) z имеет производную по переменному r (обозначим ее F'_r), а при каждом фиксированном r – производную F'_z по переменному z. Если в точке $(r_0;z_0)$ функция $F(r,z)$ принимает свое наибольшее значение, то*

$$F'_r(r_0,z_0) = 0 \text{ и } F'_z(r_0,z_0) = 0.$$

13 Он так не рассуждал...

Доказательство. В самом деле, если $F(r_0,z_0) \ge F(r,z)$ для всех r и z, то, в частности, $F(r_0,z_0) \ge F(r,z_0)$ при любом r; это означает, что функция *одного* переменного $f(r) = F'_r(r,z_0)$ имеет при $r = r_0$ максимум; значит, ее производная $f'(r) = F'_r(r,z_0)$ обязана обращаться в ноль при $r = r_0$. Аналогично убеждаемся, что $F'_z(r_0,z_0) = 0$.

Пользуясь этой леммой, найдем максимум функции V. Чтобы не иметь дело с корнями, будем искать максимум функции V^2 (ведь V и V^2 достигают своих максимумов одновременно). Итак,

$$F(r,z) = V^2 = \frac{4}{9}\pi^2\left(r^2+z^2-rz\right)^2\left(d^2-z^2\right).$$

Для нахождения точки максимума найдем, согласно лемме, F'_r и F'_z и приравняем их нулю:

$$F'_r = \frac{8}{9}\pi^2\left(r^2+z^2-rz\right)(2r-z)\left(d^2-z^2\right) = 0,$$

$$F'_z = \frac{4}{9}\pi^2\left(r^2+z^2-rz\right)\times$$

$$\times\left(2(2z-r)\left(d^2-z^2\right) + \left(r^2+z^2-rz\right)(-2z)\right) = 0.$$

Учитывая, что $0 < z < d$, получаем

$$z = 2r,$$

так что бочка – цилиндр. Подставив $z = 2r$ в формулу для F'_z, получим

$$8\pi^2 r^3\left(d^2 - 6r^2\right) = 0,$$

откуда $r = d/\sqrt{6}$. Значит,

$$d^2 - z^2 = d^2 - 4r^2 = d^2 - \frac{4d^2}{6} = \frac{d^2}{3},$$

откуда и следует утверждение задачи.

Ну конечно же, приравнивать производную нулю имеет смысл только во внутренних точках области, определения рассматриваемой функции. Равенство $z = 2r$ как раз задает одну из границ этой области, и поэтому подстановка $z = 2r$ в равенство $F'_z = 0$ ошибочна. Впрочем, к неправильному ответу привела не эта ошибка, а другая: граничные точки области определения функции надо исследовать отдельно, а о них вообще забыли.

Кто обнаружил ошибку?

Тщательнйе надо, тщательнйе!
М.Жванецкий

Ошибку обнаружила Алла Шмуклер, переводившая на иврит книгу В.М.Тихомирова «Рассказы о максимумах и минимумах». В книге было сказано: «Много интересного о задаче Кеплера читатель может почерпнуть из статьи ... «Секрет Старого Бондаря» (Квант, 1986, №8, с. 14)». Всего одно предложение! Нужно обладать фанатичной работоспособностью и сверхдобросовестностью, чтобы для перевода этого предложения пойти в библиотеку и изучить статью, причем настолько внимательно, чтобы заметить ошибку, пропущенную автором и редакцией!

Рейнская бочка

Одна из причин ошибки в статье «Секрет Старого Бондаря» – неудачные обозначения. Вместо z лучше рассмотреть величину $R = BE/2$ (см. рис. 6). Кроме того, обозначим буквой h расстояние между прямыми AF и BE.

Как известно, объем усеченного конуса, радиусы оснований которого r и R, а высота[14] h, равен

$$\frac{\pi h}{3}\left(r^2 + rR + R^2\right).$$

По теореме Пифагора,

$$d^2 = (r+R)^2 + h^2.$$

Поэтому объем усеченного конуса равен

$$\frac{\pi h}{3}\left(d^2 - h^2 - Rr\right).$$

Если d и h зафиксировать (и если, разумеется, $0 < h < d$), то будет фиксирована сумма $r + R$. Но произведение rR при этом фиксировано не будет! Объем будет наибольшим, когда наименьшим будет произведение rR. Меньше нуля произведение стать не может. А нулем – может. Наибольший объем равен $\frac{\pi h}{3}\left(d^2 - h^2\right)$ и достигается для конуса (при этом $r = 0$ и $R = \sqrt{d^2 - h^2}$).

Итак, бочка максимального объема составлена из двух конусов.

Осталось выяснить, при каком h (разумеется, $0 < h < d$) величина $h\left(d^2 - h^2\right)$ максимальна. Почти такую же задачу мы уже решали, изучая австрийскую бочку. Ответ – при $h = d/\sqrt{3}$. Объем бочки при этом равен $\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}d^3$. Это и есть наибольший возможный объем бочки – очень похожей, по словам Кеплера, на те, что приходили с Рейна! (Напомним, что объем австрийской бочки равен $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}d^3$, что составляет лишь 75% объема рейнской бочки. Кеплер комментировал это так: «Предполагая, что бочки представляют собой просто удвоенные усеченные конусы, заключаем, что продолговатые умеренно пузатые вместительнее цилиндрических того же поперечного размера, и никогда не делают бочек столь чудовищно пузатых, чтобы они оказались снова менее вместительны, чем цилиндрические того же продольного размера».)

Конус максимального объема

Интересно, что у задачи о конусе максимального объема есть забавная переформулировка и естественное решение – пятое по счету решение задачи об австрийской бочке!

Рассмотрим круг радиуса R. Вырежем из него сектор и свернем из оставшейся части «фантик» – конус. Совершенно ясно, что если вырезанный сектор очень мал, то высота конуса и его объем тоже малы (рис.16). Но и вырезать почти все,

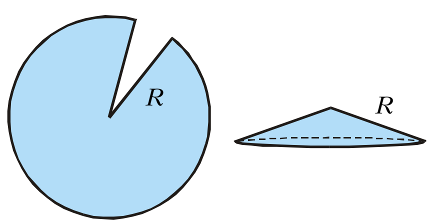


Рис.16

оставляя лишь маленький сектор (рис.17), тоже неразумно, если мы хотим получить конус сколь-нибудь значительного объема: узкий конус хотя и будет иметь высоту, мало отличающуюся от R, но площадь его основания будет мала.

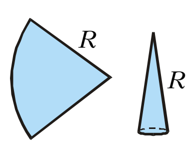


Рис.17

Чтобы найти конус максимального объема, обозначим через α половину величины угла осевого сечения конуса (рис.18). Тогда радиус основания конуса равен $R\sin\alpha$, высота равна $R\cos\alpha$, а объем равен

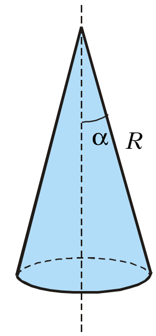


Рис.18

$$\frac{1}{3}\cdot\pi(R\sin\alpha)^2\cdot R\cos\alpha = \frac{\pi}{3}R^3\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

Значит, объем максимален, когда максимально значение функции

$$\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

График этой функции изображен на рисунке 19. Видно, что максимальное

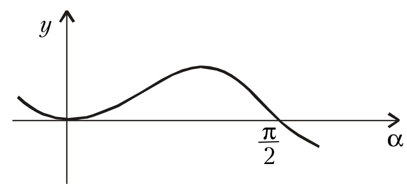


Рис.19

значение достигается при α, чуть превышающем 45°. Впрочем, мы можем явно найти максимум этой функции[15]: ее производная равна $2\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$ и обращается в ноль (при $0 < \alpha < \pi$), когда $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$. Объем конуса при этом равен $2\pi R^3/\left(9\sqrt{3}\right)$.

При помощи калькулятора легко проверить, что

$$2\operatorname{arctg}\sqrt{2} \approx 109{,}47°.$$

Любители минут[16] могут записать этот ответ в виде 109°27′. В учебнике химии о молекуле метана (CH_4) можно прочитать, что валентные связи атома углерода направлены к вершинам тетраэдра, и угол между ними составляет 109°28′. И это не случайное совпадение: легко проверить, что угол величиной $2\operatorname{arctg}\sqrt{2}$ образуется, если из центра правильного тетраэдра провести лучи в две его вершины. (Другими словами, ребро правильного тетраэдра в $2\sqrt{2}$ раз больше расстояния от центра этого тетраэдра до середины ребра.)

---

[14] *Т.е. расстояние между плоскостями оснований.*

[15] *Заметьте: замена переменной* $x = \cos\alpha$ *приводит к функции* $\left(1 - x^2\right)x$, *где* $0 < x < 1$.

[16] *Как известно, 1 градус – это 60 минут.*

Упражнения

1. Пусть электрическая лампа может передвигаться (например, на блоке) по вертикальной прямой OB (рис.20). На каком расстоянии от горизонтальной плоскости ее следует поместить, чтобы в точке A получить наибольшую освещенность? (*Указание.* Освещенность E пропорциональна косинусу угла падения лучей ($\angle BAN = \alpha$) и обратно пропорциональна квадрату расстояния AB, т.е. $E = (C\cos\alpha)/AB^2$, где C зависит лишь от лампы.)

2. Найдите $\max\limits_{\substack{a\le b\\ a+b=8}} ab(b-a)$, иными словами, разделите число 8 на две такие части, чтобы произведение их разности на их произведение было максимальным.

3. В данный шар впишите конус максимального объема.

Рис.20

4. В данный конус впишите цилиндр максимального объема, ось которого совпадает с осью конуса.

5. а) Впишите в круг радиуса r прямоугольник так, чтобы произведение одной стороны на квадрат другой было наибольшим. б) Известно, что прочность балки с прямоугольным поперечным сечением пропорциональна ширине и квадрату высоты. Докажите, что у балки наибольшей прочности, выпиленной из круглого бревна, отношение высоты к ширине равно $\sqrt{2}$.

6. Найдите наибольший возможный объем прямоугольного параллелепипеда, основание которого квадрат, а периметр каждой из четырех боковых граней равен 6.

7. Найдите наибольший возможный объем параллелепипеда, вписанного в тетраэдр объема V.

8. Какие значения может принимать площадь сечения тетраэдра плоскостью, параллельной боковой грани тетраэдра и касающейся вписанного в тетраэдр шара, если сумма площадей граней тетраэдра равна S?

9. Найдите наибольший возможный объем цилиндра, вписанного в куб со стороной 1 таким образом, что ось цилиндра лежит на диагонали этого куба.

10. В данный прямой круговой конус вписан прямой круговой конус наибольшего возможного объема, вершина которого находится в центре основания данного конуса (рис.21). Докажите, что высота внутреннего конуса составляет треть высоты данного.

11. Сосуд имеет форму перевернутой вверх дном четырехугольной пирамиды. Сторона основания пирамиды (т.е. сторона отсутствующей «крышки») равна 1, высота равна h. В сосуд налита вода, поверхность которой перпендикулярна высоте пирамиды, а высота водяного столба равна a. В сосуд погружается металлический куб, две параллельные грани которого параллельны поверхности воды. Определите все значения a, при которых можно взять куб такого размера, что при его погружении часть воды выльется из сосуда.

12. а) Боковое ребро a правильной n-угольной пирамиды образует с плоско-

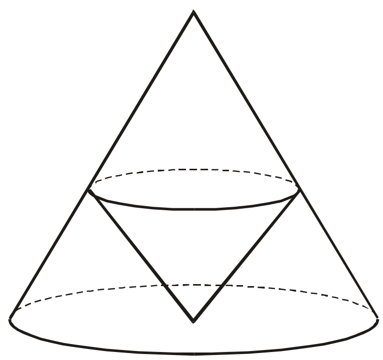


Рис.21

стью основания угол φ. При каком φ объем пирамиды наибольший возможный? б) Апофема правильной n-угольной пирамиды равна b. При каком угле наклона боковых граней к основанию объем пирамиды наибольший возможный?

13. Внутри угла величиной φ возьмем точку, сумма расстояний от которой до сторон угла равна a, и проведем через нее прямую, перпендикулярную биссектрисе угла. При каком значении φ радиус окружности, описанной около полученного треугольника, наименьший возможный?

14. а) Из квадратного жестяного листа со стороной a желают сделать открытый сверху ящик возможно большего объема, вырезав равные квадраты по углам, удалив их и затем загнув жесть, чтобы образовать бока ящика. Какова должна быть длина стороны у вырезаемых квадратов? б) Дан прямоугольный лист жести размером $a \times b$. Вырежьте из его углов одинаковые квадраты (рис.22) так, чтобы после загибания кромок получилась открытая сверху коробка (рис.23) максимально возможного объема.

15. Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + r .$$

а) Докажите, что для любых вещественных чисел p, q, r существует такое число a, что при замене переменной $x = a + t$ коэффициент при t^2 обратится в ноль, и найдите это число. б) Какому неравенству должны удовлетворять числа p, q, r для того, чтобы существовало такое число a, что при замене переменной $x = a + t$ коэффициент при t обратился в ноль? в) Какому неравенству должны удовлетворять числа p, q, r для того, чтобы функция $f(x)$ монотонно возрастала на всей вещественной оси?

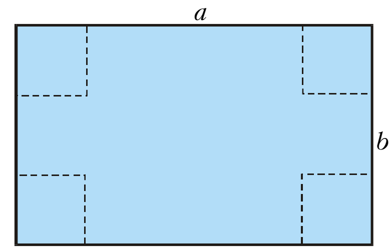


Рис.22

16. Если объем и высота некоторого цилиндра равны, соответственно, объе-

Рис.23

му и высоте некоторого усеченного конуса, то радиус шара, описанного около рассматриваемого цилиндра, больше радиуса шара, описанного около рассматриваемого усеченного конуса. Докажите это.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования
http://www.courier.com.ru

Vivos Voco!
http://www.accessnet.ru/vivovoco
(раздел «Из номера»)