Шар и сфера

Шар состоит из точек, удаленных от данной точки (центра) не более чем на данное расстояние (радиус). Сфера — это граница шара. Поскольку расстояние от начала координат до точки $(x; y; z)$ равно $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то сфера радиуса r с центром в начале координат задана уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

а шар — неравенством

$$x^2 + y^2 + z^2 \le r^2.$$

Объем шара радиуса r равен $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Зная это, легко найти площадь сферы. Для этого рассмотрим шар с тем же центром и радиусом $r + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Разность объемов равна

$$\frac{4}{3}\pi\left((r+\varepsilon)^3 - r^3\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left(3r^2\varepsilon + 3r\varepsilon^2 + \varepsilon^3\right).$$

Но тот же самый объем при маленьких ε с довольно высокой точностью равен εS, где S — площадь сферы (по сути это определение площади поверхности). Значит,

$$S = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 = 4\pi r^2.$$

Архимед доказал, что любые две плоскости, параллельные основаниям описанного около сферы цилиндра (рис.1), высекают на сфере и на цилиндре «пояски» одинаковой площади. (В частности, площадь всей сферы равна площади боковой поверхности цилиндра $2r \cdot 2\pi r = 4\pi r^2$.)

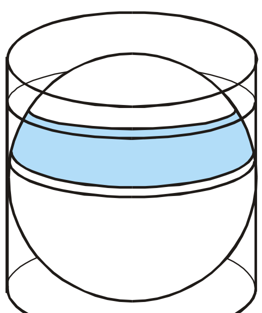

Рис. 1

Трехгранный угол с вершиной в центре сферы высекает на ней сферический треугольник (рис.2).

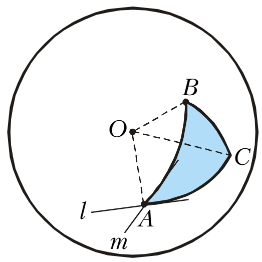

Рис. 2

Стороны сферического треугольника — дуги больших кругов. Поскольку касательные l и m к сфере перпендикулярны радиусу OA, то величины $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$ углов сферического треугольника равны величинам соответствующих двугранных углов трехгранного угла.

«Двуугольник» D_A (рис.3) составляет от площади сферы такую же часть, как угол $2\hat{A}$ от угла 2π. Поэтому его площадь

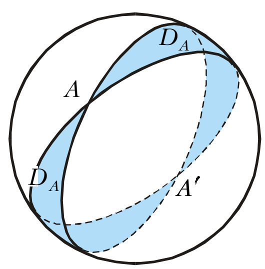

Рис. 3

равна

$$\frac{2\hat{A}}{2\pi} \cdot 4\pi r^2 = 4r^2\hat{A}.$$

Теперь продолжим стороны AB, BC и CA сферического треугольника до больших кругов (рис.4). Очевидно, двуугольники D_A, D_B и D_C покрывают сферический треугольник ABC и симметричный ему треугольник $A'B'C'$ в три слоя, а остальную часть сферы — в один слой. Поэтому

$$4r^2\hat{A} + 4r^2\hat{B} + 4r^2\hat{C} =$$

$$= 4\pi r^2 + 2S_{ABC} + 2S_{A'B'C'},$$

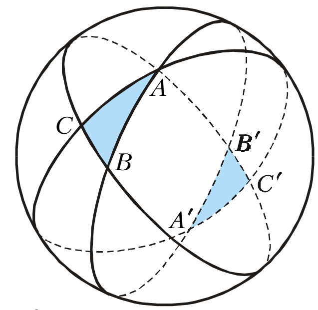

Рис. 4

где $S_{ABC} = S_{A'B'C'}$. Следовательно,

$$S_{ABC} = \left(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi\right) r^2.$$

В частности, сумма углов любого сферического треугольника больше 180°.

В любой тетраэдр можно единственным способом вписать сферу, причем имеет место формула для объема тетраэдра $ABCD$:

$$V = \frac{1}{3}\left(S_{ABC} + S_{ABD} + S_{ACD} + S_{BCD}\right) r,$$

где r – радиус вписанной сферы. Существуют также 4 вневписанные сферы, каждая из которых касается одной грани тетраэдра и продолжений трех других граней, при этом

$$V = \frac{1}{3}\left(S_{ABC} + S_{ABD} + S_{ACD} - S_{BCD}\right) r_a,$$

где r_a – радиус сферы, касающейся грани BCD и продолжений трех других граней. Существуют ли еще сферы, которые касаются всех четырех плоскостей граней тетраэдра? Ответ зависит от площадей этих граней. Если существует сфера с центром O и радиусом ρ, касающаяся «продолжений за ребро» граней ABC и ABD и «продолжений за вершины» A и B граней ACD и BCD (рис.5), то объем V равен

$$V_{ACDO} + V_{BCDO} - V_{ABCO} - V_{ABDO} =$$

$$= \frac{1}{3}\rho\left(S_{ACD} + S_{BCD} - S_{ABC} - S_{ABD}\right).$$

Необходимым условием для этого

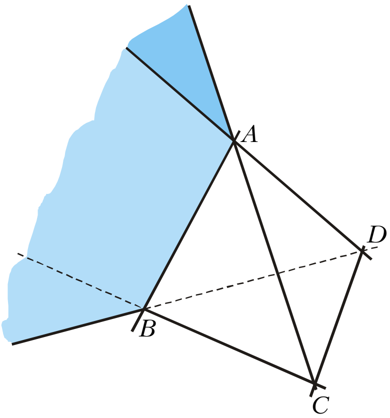

Рис. 5

является неравенство

$$S_{ACD} + S_{BCD} > S_{ABC} + S_{ABD}.$$

Можно доказать, что это условие не только необходимое, но и достаточное. В частности, если сумма площадей никаких двух граней тетраэдра не равна сумме площадей двух других граней, то существуют 1 + 4 + 3 = 8 сфер, каждая из которых касается всех четырех плоскостей граней тетраэдра. А для равногранного тетраэдра таких сфер всего 1 + 3 = 4.

Как расположить на сфере n точек, чтобы наименьшее из всех расстояний между ними было как можно больше? Эта задача не решена до сих пор. Оптимальные расположения при $n = 2, 3, \ldots, 9$ показаны на рисунке 6, где линиями соединены те точки, расстояния между которыми равны наименьшему из растояний между рассматриваемыми n точками. При $n > 9$ решение известно для $n = 12$ (вершины икосаэдра) и $n = 24$ (вершины полуправильного 38-гранника, ограниченного 32 равносторонними треугольниками и 6 квадратами; в каждой вершине сходятся 4 треугольника и 1 квадрат).

Другая похожая задача — как расположить на непроводящей электричество сфере n одинаковых зарядов. Отталкиваясь, они стараются «разбежаться в разные стороны», чтобы минимизировать потенциальную энергию системы. При n = 2, 3, 4, 6 и 12 ответы найдены: это, соответственно, 2 противоположные точки сферы, 3 вершины вписанного в большой круг сферы равностороннего треугольника, 4 вершины правильного тетраэдра, 6 вершин октаэдра и 12 вершин икосаэдра. В общем случае решение неизвестно.

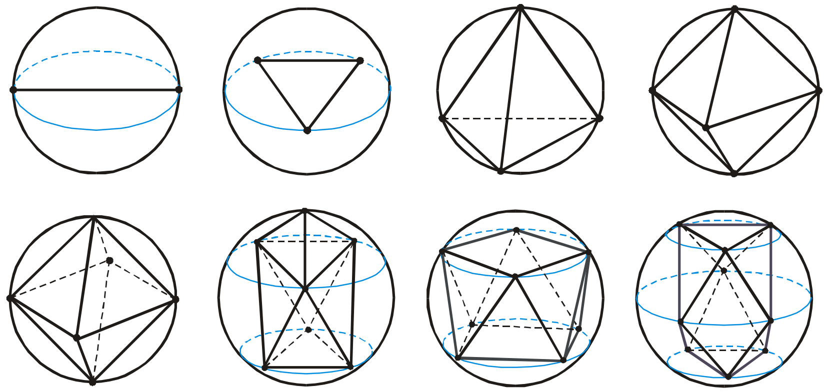

Рис. 6

Рассмотрим куб размером 3×3×3. Отметим центры всех 12 единичных кубиков, которые выходят на поверхность куба двумя своими гранями (т.е. не являются ни угловыми, ни центральными на гранях). Поскольку все эти 12 точек удалены от центра куба на расстояние $\sqrt{2}$, то сферы радиуса $1/\sqrt{2}$ с центрами в них касаются центрального шара (рис.7).

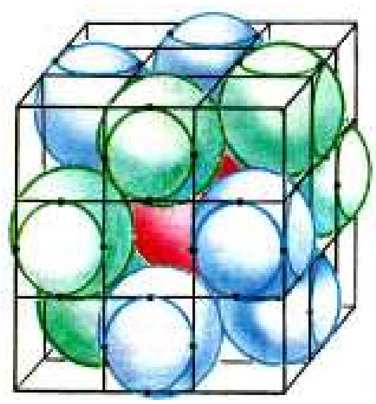

Рис. 7

Можно ли расположить 13 одинаковых шаров, чтобы все они касались одного шара того же радиуса? Джеймс Грегори (1638–1675) надеялся, что можно. Исаак Ньютон (1643–1727) утверждал, что нельзя. Точку в их споре поставили в 1953 году К.Шютте и Б.Л.Ван-дер-Варден. Прав оказался Ньютон.

Возьмем все точки пространства с целыми координатами и отметим те из них, сумма координат которых четна (рис.8). Рассмотрим шары радиуса $1/\sqrt{2}$ с центрами в отмеченных точках. Доля объема, которую занимают эти шары, равна $\pi/\sqrt{18} \approx 0{,}7405$. Иоганн Кеплер в 1611 году выдвинул гипотезу, что это — наиболее плотная возможная упаковка шаров. Задача о плотной упаковке шаров вошла (под номером 18) и в список наиболее важных проблем математики XX века, составленный в 1900 году Давидом Гильбертом. В 1998 году вышла серия из шести статей Хайеса и Фергюсона, где при помощи весьма сложных рассуждений задача сведена к рассмотрению примерно 5000 конфигураций, которое было выполнено на компьютере. Окончательную проверку эти вычисления и рассуждения еще не прошли, и можно ожидать всяких сюрпризов.

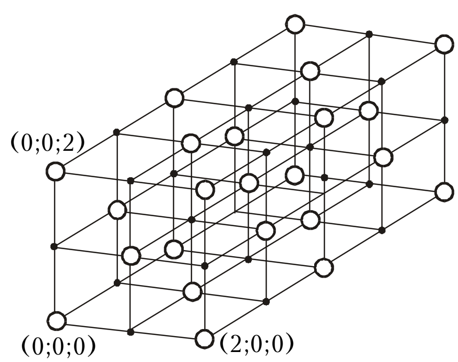

Рис. 8

А.Жуков, А.Спивак