пройдет сквозь плазму, как через пустое пространство ($v_ф = c$ и $n(\infty) = 1$). Очевидно, что стремление $n(\omega)$ к 1 при $\omega \to \infty$ является свойством любой среды, а не только плазмы.

Две скорости распространения радиоволн в плазме

Подставив выражение (4) для коэффициента преломления в формулу (1), легко убедиться, что $v_ф > c$, так как $n < 1$. Следовательно, волны в плазме распространяются со *сверхсветовой* скоростью! Это утверждение сначала вызывает чувство протеста – ведь согласно теории относительности Эйнштейна никакое воздействие (сигнал) не может распространяться со скоростью большей c! Однако на самом деле противоречия здесь нет. Вычисленная скорость относится к волне, имеющей определенную частоту. Такая волна представляет собой бесконечную синусоиду, которая сама по себе не может передать никакого сигнала, так как ее форма с течением времени остается неизменной. Чтобы передать сигнал, на волне надо поставить какие-либо «метки», или, как говорят, *промодулировать* синусоидальную волну, меняя ее параметры, например амплитуду, по определенному закону. При этом волна уже не характеризуется какой-то одной частотой, а содержит *группу волн* с разными частотами. Набор частотных составляющих, или спектр модулированной волны, зависит от передаваемого сигнала: чем сложнее сигнал, тем шире его спектр.

Рассмотрим простейший случай, когда группа волн состоит всего из двух синусоид с одной и той же амплитудой E_0, но с разными частотами ω_1 и ω_2. Тогда

$$E = E_1 + E_2,$$

где

$$E_1 = E_0 \sin\omega_1\left(t - \frac{x}{v_{ф1}}\right),\qquad E_2 = E_0 \sin\omega_2\left(t - \frac{x}{v_{ф2}}\right). \qquad (5)$$

Мы направили ось X вдоль направления распространения волны и учли, что фазы двух синусоид имеют разное время запаздывания после прохождения одной и той же дистанции x, так как они распространяются с разными скоростями: время запаздывания фазы первой волны на расстоянии x равно $x/v_{ф1}$, а второй волны $x/v_{ф2}$.

В физической литературе принято использовать для описания волновых процессов несколько иные обозначения, а именно вводится так называемое волновое число $k = \omega/v_ф = \omega n/c$. В новых обозначениях формулы (5) становятся симметричными относительно переменных t и x:

$$E_1 = E_0 \sin(\omega_1 t - k_1 x),\qquad E_2 = E_0 \sin(\omega_2 t - k_2 x), \qquad (6)$$

где $k_1 = \omega_1 n(\omega_1)/c$ и $k_2 = \omega_2 n(\omega_2)/c$. Обозначим среднюю частоту $(\omega_1 + \omega_2)/2$ через ω_0, а полуразность частот $(\omega_1 - \omega_2)/2$ через $\Delta\omega$. Точно так же поступим с $k(\omega)$. Тогда

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \Delta\omega,\ k_{1,2} = k_0 \pm \Delta k. \qquad (7)$$

После несложных тригонометрических преобразований получим следующее выражение для результирующей волны:

$$E = A(x,t)\sin(\omega_0 t - k_0 x), \qquad (8)$$

где $A(x,t) = 2E_0\cos(\Delta\omega t - \Delta k x)$ – амплитуда волны, которая уже не является постоянной величиной. Допустим, что волны (6) имеют близкие друг к другу частоты, т.е. $\Delta\omega \ll \omega_0$ и $\Delta k \ll k_0$. В таком случае амплитуда $A(x,t)$ меняется в пространстве и во времени очень медленно по сравнению с фазой волны.

Вопрос о скорости распространения волны может быть сформулирован двояко. Если иметь в виду скорость распространения фазы, то вопрос формулируется так: с какой скоростью должен двигаться наблюдатель вдоль оси X, чтобы он регистрировал все время *одну и ту же фазу* волны? Положив $\omega_0 t - k_0 x = \mathrm{const}$ и вычислив производную dx/dt, находим требуемую скорость:

$$v_ф = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega_0}{k_0} = \frac{c}{n(\omega_0)}.$$

Это та самая скорость, которую мы ввели ранее в формуле (1). Теперь смысл термина *фазовая скорость* становится понятным.

Аналогично формулируется вопрос о скорости распространения амплитуды: с какой скоростью должен двигаться наблюдатель вдоль оси X, чтобы он фиксировал все время *одну и ту же амплитуду* результирующей волны? Положив $\Delta\omega t - \Delta k x = \mathrm{const}$, находим новую скорость

$$v_г = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k},$$

которая называется *групповой скоростью*. Более строго она определяется как предельный переход при $\Delta\omega \to 0$ и $\Delta k \to 0$, или, что то же самое, $\omega_1 \to \omega_2 \to \omega_0$ и $k_1 \to k_2 \to k_0$. При таком предельном переходе дробь $\Delta\omega/\Delta k$ становится равной производной $d\omega/dk$, и

$$v_г = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{\omega=\omega_0}, \qquad (9)$$

или, учитывая, что $k(\omega) = \omega n(\omega)/c$,

$$v_г = \frac{1}{(dk/d\omega)} = \left(\frac{n(\omega)}{c} + \frac{\omega}{c}\frac{dn}{d\omega}\right)^{-1}. \qquad (10)$$

Видно, что только в том случае, когда n не зависит от ω, т.е. $dn/d\omega = 0$, скорости $v_ф$ и $v_г$ совпадают. В плазме это не так. Подставив в (10) формулу (4), получим

$$v_г = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = cn(\omega). \qquad (11)$$

Поскольку $n(\omega) < 1$, то $v_г < c$, т.е. сигнал проходит сквозь плазму со скоростью меньшей c, как и должно быть согласно теории относительности. Сопоставляя формулы (1) и (11), находим простое соотношение, справедливое для радиоволн в плазме:

$$v_ф v_г = c^2.$$

На рисунке 1 приведены графики $v_ф(\omega)$ и $v_г(\omega)$. Формулами (1) и

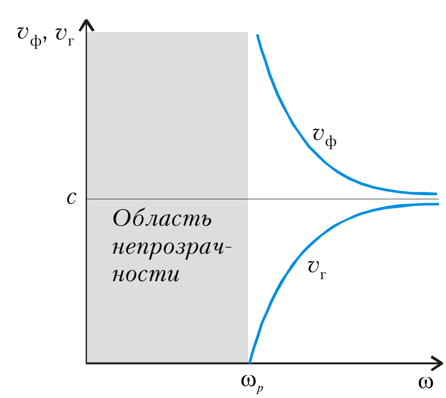

Рис.1. Зависимость фазовой $v_ф$ и групповой $v_г$ скоростей в плазме от частоты