лер, переводившая на иврит книгу В.М.Тихомирова «Рассказы о максимумах и минимумах». В книге было сказано: «Много интересного о задаче Кеплера читатель может почерпнуть из статьи … «Секрет Старого Бондаря» (Квант, 1986, №8, с. 14)». Всего одно предложение! Нужно обладать фанатичной работоспособностью и сверхдобросовестностью, чтобы для перевода этого предложения пойти в библиотеку и изучить статью, причем настолько внимательно, чтобы заметить ошибку, пропущенную автором и редакцией!

Рейнская бочка

Одна из причин ошибки в статье «Секрет Старого Бондаря» – неудачные обозначения. Вместо z лучше рассмотреть величину $R = BE/2$ (см. рис. 6). Кроме того, обозначим буквой h расстояние между прямыми AF и BE.

Как известно, объем усеченного конуса, радиусы оснований которого r и R, а высота[14] h, равен

$$\frac{\pi h}{3}\left(r^2 + rR + R^2\right).$$

По теореме Пифагора,

$$d^2 = (r+R)^2 + h^2.$$

Поэтому объем усеченного конуса равен

$$\frac{\pi h}{3}\left(d^2 - h^2 - Rr\right).$$

Если d и h зафиксировать (и если, разумеется, $0 < h < d$), то будет фиксирована сумма $r + R$. Но произведение rR при этом фиксировано не будет! Объем будет наибольшим, когда наименьшим будет произведение rR. Меньше нуля произведение стать не может. А нулем – может. Наибольший объем равен $\frac{\pi h}{3}\left(d^2 - h^2\right)$ и достигается для конуса (при этом $r = 0$ и $R = \sqrt{d^2 - h^2}$).

Итак, бочка максимального объема составлена из двух конусов.

Осталось выяснить, при каком h (разумеется, $0 < h < d$) величина $h\left(d^2 - h^2\right)$ максимальна. Почти такую же задачу мы уже решали, изучая австрийскую бочку. Ответ – при $h = d/\sqrt{3}$. Объем бочки при этом равен $\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}d^3$. Это и есть наибольший возможный объем бочки – очень похожей, по словам Кеплера, на те, что приходили с Рейна! (Напомним, что объем австрийской бочки равен $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}d^3$, что составляет лишь 75% объема рейнской бочки. Кеплер комментировал это так: «Предполагая, что бочки представляют собой просто удвоенные усеченные конусы, заключаем, что продолговатые умеренно пузатые вместительнее цилиндрических того же поперечного размера, и никогда не делают бочек столь чудовищно пузатых, чтобы они оказались снова менее вместительны, чем цилиндрические того же продольного размера».)

Конус максимального объема

Интересно, что у задачи о конусе максимального объема есть забавная переформулировка и естественное решение – пятое по счету решение задачи об австрийской бочке!

Рассмотрим круг радиуса R. Вырежем из него сектор и свернем из оставшейся

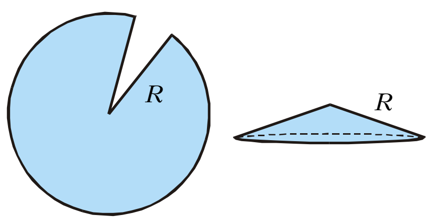

Рис.16

части «фантик» – конус. Совершенно ясно, что если вырезанный сектор очень мал, то высота конуса и его объем тоже

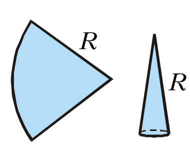

Рис.17

малы (рис.16). Но и вырезать почти все, оставляя лишь маленький сектор (рис.17), тоже неразумно, если мы хотим получить конус сколь-нибудь значительного объема: узкий конус хотя и будет иметь высоту, мало отличающуюся от R, но площадь его основания будет мала.

Чтобы найти конус максимального

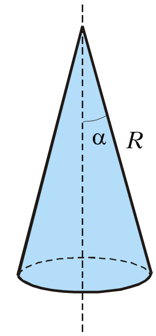

Рис.18

объема, обозначим через α половину величины угла осевого сечения конуса (рис.18). Тогда радиус основания конуса равен $R\sin\alpha$, высота равна $R\cos\alpha$, а объем равен

$$\frac{1}{3}\cdot\pi(R\sin\alpha)^2\cdot R\cos\alpha = \frac{\pi}{3}R^3\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

Значит, объем максимален, когда максимально значение функции

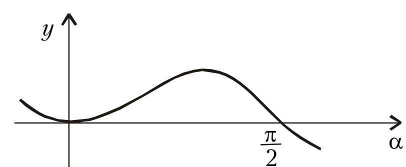

Рис.19

$$\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

График этой функции изображен на рисунке 19. Видно, что максимальное значение достигается при α, чуть превышающем 45°. Впрочем, мы можем явно найти максимум этой функции[15]: ее производная равна $2\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$ и обращается в ноль (при $0 < \alpha < \pi$), когда $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$. Объем конуса при этом равен $2\pi R^3/\left(9\sqrt{3}\right)$.

При помощи калькулятора легко проверить, что

$$2\operatorname{arctg}\sqrt{2} \approx 109{,}47°.$$

Любители минут[16] могут записать этот ответ в виде 109°27′. В учебнике химии о молекуле метана (CH_4) можно прочитать, что валентные связи атома углерода направлены к вершинам тетраэдра, и угол между ними составляет 109°28′. И это не случайное совпадение: легко проверить, что угол величиной $2\operatorname{arctg}\sqrt{2}$ образуется, если из центра правильного тетраэдра провести лучи

[14] *Т.е. расстояние между плоскостями оснований.*

[15] *Заметьте: замена переменной* $x = \cos\alpha$ *приводит к функции* $\left(1-x^2\right)x$, *где* $0 < x < 1$.

[16] *Как известно, 1 градус – это 60 минут.*