самому, несмотря на большой недостаток средств. При этом мне представилась возможность не только исправить ее, но и продвинуть в отношении объема сравнительно с первоначально написанной. Не скрою, что на эти размышления было затрачено некоторое время, уделенное от прочих занятий, но я не жалею об этой потере, так как никоим образом невозможно, чтобы пожал плод бессмертия труд, не посеявший некоторого времени.»

Кеплер не скрывает от читателя свои методы и даже заблуждения. Например, доказав, что из всех вписанных в данный круг прямоугольников наибольшую площадь имеет квадрат[11], он признаётся: «Не хочу скрыть ошибки, в которую меня первоначально ввергло поверхностное рассмотрение этой теоремы, ибо это напоминание предупредит читателя, чтобы он остерегался подобных же (заблуждений)». И дальше подробно объясняет, в чем дело, доказывая странную для нынешнего читателя теорему III: «Отношения объемов прямых цилиндров, осевые сечения которых имеют одну и ту же диагональ, не аналогичны[12] отношениям площадей осевых сечений, и при наибольшей площади сечения объем не наибольший».

В другом месте читаем: «Кто, избавившись от заблуждения приписывать наибольший объем тому из цилиндров с данной диагональю, у которого площадь осевого сечения наибольшая, и узнав, что самым вместительным будет по теореме V цилиндр, в котором отношение диаметра основания к высоте равно $\sqrt{2}$,… оказался бы столь проницательным и осторожным, чтобы тотчас не предположить того же самого и об объеме усеченного конуса..? Я же это подумал и держался такого мнения последние полтора года и даже дошел до того, что, опираясь на это основание, считал все рейнские бочки, без различия их пузатости, в отношении емкости ниже австрийских… Поэтому я отношу к пользе, полученной от настоящего печатания, что при подготовке издания геометрия потеребила меня за ухо…».

А вот редакцию «Кванта» никто не потеребил, когда Кеплеру была приписана ошибка, которую он не сделал. В статье «Секрет Старого Бондаря» читаем: «Обращусь теперь к более общему случаю,– рассуждал Кеплер[13],– когда … бочку можно с достаточно хорошей точностью представить себе как составленную из двух одинаковых усеченных конусов, состыкованных своими большими основаниями (см. рис.6).

При этом я, конечно, допущу некоторую неточность, но если бочка не очень «пузатая», то погрешность будет незначительной. Затем среди всевозможных бочек, у которых расстояние AE равно заданному d, выберу ту, которая имеет наибольшую вместимость».

Обозначим $AF = 2r$ и $EN = z$, где N – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую BE (см. рис.6). При помощи формулы объема усеченного конуса, которая еще встретится нам в этой статье, можно вычислить объем бочки:

$$V = \frac{2}{3}\pi\left(r^2 + r(z-r) + (z-r)^2\right)\sqrt{d^2 - z^2}.$$

Далее в статье сформулирована задача: «Докажите, … что среди бочек указанного вида с заданным значением d… наиболее вместимой оказывается цилиндрическая бочка, у которой образующая в $\sqrt{2}$ раз больше диаметра днища».

И 14 лет никто из сотен тысяч читателей не замечал, что утверждение этой задачи ложно! Мы сейчас воспроизведем (с незначительными сокращениями) решение этой задачи из статьи «Секрет Старого Бондаря». Постарайтесь найти ошибку раньше, чем мы ее укажем.

Найдем, при каких значениях переменных r и z емкость бочки V будет – при заданном d – наибольшей. Для этой цели воспользуемся следующей леммой.

Лемма. *Пусть функция $F(r,z)$ при каждом фиксированном (постоянном) z имеет производную по переменному r (обозначим ее F'_r), а при каждом фиксированном r – производную F'_z по переменному z. Если в точке $(r_0;z_0)$ функция $F(r,z)$ принимает свое наибольшее значение, то*

$$F'_r(r_0,z_0) = 0 \text{ и } F'_z(r_0,z_0) = 0.$$

Доказательство. В самом деле, если $F(r_0,z_0) \ge F(r,z)$ для всех r и z, то, в частности, $F(r_0,z_0) \ge F(r,z_0)$ при любом r; это означает, что функция *одного* переменного $f(r) = F'_r(r,z_0)$ имеет при $r = r_0$ максимум; значит, ее производная $f'(r) = F'_r(r,z_0)$ обязана обращаться в ноль при $r = r_0$. Аналогично убеждаемся, что $F'_z(r_0,z_0) = 0$.

Пользуясь этой леммой, найдем максимум функции V. Чтобы не иметь дело с корнями, будем искать максимум функции V^2 (ведь V и V^2 достигают своих максимумов одновременно). Итак,

$$F(r,z) = V^2 = \frac{4}{9}\pi^2\left(r^2+z^2-rz\right)^2\left(d^2-z^2\right).$$

Для нахождения точки максимума найдем, согласно лемме, F'_r и F'_z и приравняем их нулю:

$$F'_r = \frac{8}{9}\pi^2\left(r^2+z^2-rz\right)(2r-z)\left(d^2-z^2\right) = 0,$$

$$F'_z = \frac{4}{9}\pi^2\left(r^2+z^2-rz\right)\times$$
$$\times\left(2(2z-r)\left(d^2-z^2\right)+\left(r^2+z^2-rz\right)(-2z)\right) = 0.$$

Учитывая, что $0 < z < d$, получаем

$$z = 2r,$$

так что бочка – цилиндр. Подставив $z = 2r$ в формулу для F'_z, получим

$$8\pi^2 r^3\left(d^2-6r^2\right) = 0,$$

откуда $r = d/\sqrt{6}$. Значит,

$$d^2 - z^2 = d^2 - 4r^2 = d^2 - \frac{4d^2}{6} = \frac{d^2}{3},$$

откуда и следует утверждение задачи.

Ну конечно же, приравнивать производную нулю имеет смысл только во внутренних точках области, определения рассматриваемой функции. Равенство $z = 2r$ как раз задает одну из границ этой области, и поэтому подстановка $z = 2r$ в равенство $F'_z = 0$ ошибочна. Впрочем, к неправильному ответу привела не эта ошибка, а другая: граничные точки области определения функции надо исследовать отдельно, а о них вообще забыли.

Кто обнаружил ошибку?

Тщательнйе надо, тщательнйе!
М.Жванецкий

Ошибку обнаружила Алла Шмук-

[11] *Словами Кеплера: «Осевые сечения прямых цилиндров, имеющих равные диагонали, имеют неравные площади, за исключением того случая, когда у них одинаковые или обратные отношения диаметра основания к высоте; наибольшая площадь среди них у того, который получается от сечения цилиндра с высотой, равной диаметру основания».*

[12] *Т.е. не равны.*

[13] *Он так не рассуждал…*