для качения (отсюда и название цилиндра[6]) и для перевозки на телегах, и … является … красивой на взгляд».

В другом месте читаем: «… бочка имеет форму пузатого цилиндра, или, говоря точнее, бочка представляется как бы разделенной на два усеченных конуса, вершины которых, направленные в противоположные стороны, отсечены деревянными днищами бочки, а основание общее, разделяющее конусы и образующее наибольший круг, опоясывающий бочки». Это значит, что Кеплер предлагает такую математическую модель винной бочки: две одинаковые половины, полученные вращением равнобоких трапеций $ABEF$ и $BCDE$ вокруг их общей оси симметрии l (рис.6). Продавец мерной линейкой измеряет расстояние $d = AE$.

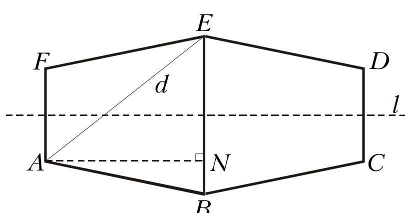

Рис.6

Кубическая шкала

На линейке, которой пользовался продавец вина, пометки были проставлены не так, как на обычной, а по «кубическому закону» (рис.7). Идея очень проста: при увеличении линейных размеров в k раз объем увеличивается в k^3 раз. (В самом деле, в k раз увеличиваются и длина, и ширина, и высота.)[7]

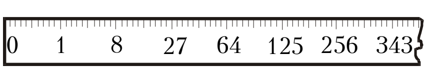

Рис.7

Но как австрийские бочары умудрялись делать бочки абсолютно одинаковой формы (но разного размера)? Можно вообразить, что существовал какой-то австрийский стандарт. Однако кто, как и зачем его изобрел? Этот вопрос весьма интересен, и Кеплер нашел ответ. Но в двух словах тут ничего толком объяснить нельзя. Поэтому мы не будем торопиться и пока скажем лишь, что австрийская бочка – самая вместительная (при фиксированном d) из всех цилиндрических бочек. Это еще не полный ответ (непонятно, почему мерная линейка годится и для бочек, которые чуть шире или чуть уже стандартных), но это уже кое-что!

Австрийская бочка

Непузатые цилиндрические бочки более удлиненной или более укороченной формы, чем австрийские, вместительны менее последних.

И. Кеплер

Теорема V второй части «Новой стереометрии…» утверждает, что из всех цилиндров, вписанных в данный шар, наибольший объем имеет тот, высота h которого в $\sqrt{2}$ раз больше радиуса r основания этого цилиндра. Мы не будем пересказывать здесь рассуждение Кеплера, который не владел лишь нарождавшейся в его время алгеброй и потому не использовал никаких формул (кроме многочисленных пропорций), а применим для доказательства современные обозначения и алгебраические методы.

Обозначим диаметр шара буквой d (рис.8). По теореме Пифагора, $d^2 = h^2 + (2r)^2$. Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту:

$$V = \pi r^2 h = \pi \frac{d^2 - h^2}{4} h = \frac{\pi}{4} d^3 \left(1 - x^2\right) x,$$

где использовано обозначение $x = h/d$. Таким образом, мы должны

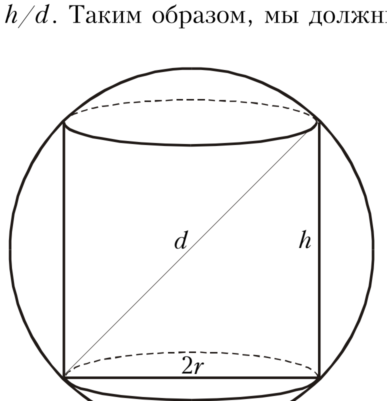

Рис.8

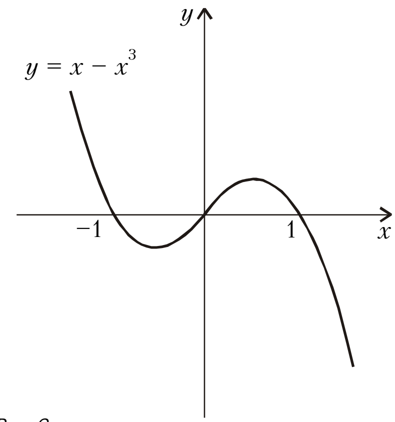

Рис.9

найти максимальное значение функции $y = x - x^3$ на интервале $(0;\ 1)$. График этой функции (даже на большей области определения) изображен на рисунке 9.

Проще всего найти точку максимума тому, кто умеет вычислять производные (и знает, что для нахождения максимума надо выбрать наибольшее из значений в тех точках, где производная равна нулю или не существует, а также в концах отрезка):

$$y' = 1 - 3x^2,$$

производная равна нулю при $x = \pm 1/\sqrt{3}$. Внутри отрезка $[0;\ 1]$ производная равна нулю лишь при $x = 1/\sqrt{3}$; на концах функция равна нулю. Поэтому наибольшее значение функция принимает при $x = 1/\sqrt{3}$ (при этом, заметьте, $h = d/\sqrt{3}$ и $r = \sqrt{\left(d^2 - h^2\right)/4} = d/\sqrt{6}$, так что $h/r = \sqrt{2}$), а максимальное значение объема цилиндрической бочки равно

$$2V = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} d^3.$$

Можно обойтись и без производных. Например, выполнить замену переменной $x = \frac{1}{\sqrt{3}} + t$. Тогда $t \in \left[-1/\sqrt{3};\ 1 - 1/\sqrt{3}\right]$ и

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} + t - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + t\right)^3 = \frac{2}{3\sqrt{3}} - t^2\sqrt{3} - t^3.$$

При $t > 0$ имеем $y < 2/\left(3\sqrt{3}\right)$. При $t \in \left[-1/\sqrt{3};\ 0\right)$, очевидно, $-t^2\sqrt{3} - t^3 = -t^2\left(\sqrt{3} + t\right) < 0$, так что нера-

[7] *Прочитав рукопись этой статьи, В.В.Произволов вспомнил, как однажды в редакцию журнала «Доклады Академии наук» один биолог принес статью, где опытным путем доказывал обнаруженный им закон: объем инфузории пропорционален третьей степени ее длины. Больших трудов стоило убедить этого биолога, что «его» закон верен не только для инфузорий, а для проверки не нужны эксперименты на мухах, крысах, обезьянах, медведях, слонах и китах.*