Сверх...

М.КАГАНОВ

Я ЛЮБЛЮ ЧИТАТЬ СЛОВАРИ и энциклопедии. Всегда найдешь много интересного, даже когда перелистываешь энциклопедическое издание, отвечающее твоей профессии.

Два года назад произошло важное событие в научной и культурной жизни России: выходом в свет пятого тома завершилось издание «Физической энциклопедии» (гл. ред. А.М.Прохоров, М.: Большая Российская энциклопедия). На издание всех пяти томов ушло более 10 лет: первый том вышел в 1988 году. Энциклопедические издания такой полноты (пять томов!) выходят редко, предыдущее было осуществлено более 20 лет назад. Похоже, последнее издание «Физической энциклопедии» (ФЭ) будет служить и тем из моих сегодняшних читателей, кто выберет своей профессией физику. Но и сейчас, уверен, вам будет интересно прочесть многие статьи из ФЭ. Правда, придется опускать подробности – их понимание требует значительно больших знаний, чем вы имеете сейчас.

Перелистывая 4-й том ФЭ, еще до того как у меня появился 5-й, я обратил внимание на то, какому большому числу физических терминов присвоен «титул» СВЕРХ. Мне захотелось на страницах журнала «Квант» поделиться своим наблюдением и, кроме того, рассказать, что́ «скрывается» за некоторыми из терминов. Я уже было взялся за дело, но увидел, что в ряде случаев авторы статей отсылают меня к статьям, которые должны быть в 5-м томе (ничего не поделаешь, энциклопедии строятся строго по алфавитному принципу). Теперь 5-й том у меня есть, и я могу осуществить свое желание.

Итак, перечень слов, начинающихся слогом «сверх», открывает термин «сверхвысокие частоты» (т.4, с.421). Соответствующая статья занимает всего четыре строки. Приведем ее полностью:

«Сверхвысокие частоты (СВЧ) – область радиочастот от 300 МГц до 300 ГГц, охватывающая дециметровые волны, сантиметровые волны и миллиметровые волны (см. *Радиоволны*)».

Слово «*Радиоволны*» напечатано курсивом. Это означает, что в ФЭ есть статья с таким названием. Действительно, в этом же томе на странице 213 такая статья есть. Кроме исторической справки [1], она содержит две таблицы, позволяющие ознакомиться с принятой терминологией, узнать, какие волны именуют длинными, какие средними, короткими и т.д.

Я насчитал 30 статей, название которых начинается со «сверх...». Относятся они к самым разным разделам физики. Однако если человека, интересующегося физикой, попросить назвать слова, начинающиеся со слога «сверх», почти наверняка он назовет сверхпроводимость и сверхтекучесть. И действительно, сверхпроводимости в ФЭ посвящено шесть статей, а сверхтекучести – три. Это неудивительно: сверхпроводимость и сверхтекучесть, пожалуй, наиболее интересные квантовые макроскопические явления.

После открытия сверхпроводников, сверхпроводимость в которых не исчезает при повышении температуры вплоть до $T \approx 100$ К (их называют высокотемпературными сверхпроводниками [2]), появилась надежда на техническое использование сверхпроводимости: в ФЭ есть статьи «Сверхпроводниковые приемники излучения» и «Сверхпроводящий магнит». Сверхпроводящие магниты стали широко распространенными источниками магнитного поля, во всяком случае – в физических лабораториях.

Статьи-спутники основной статьи «Сверхтекучесть», уверен, у многих (и не только у начинающих физиков) вызовут удивление. Одна называется «Сверхтекучая модель ядра», а другая – «Сверхтекучесть атомных ядер». Оказывается, в атомных ядрах средних и больших размеров «движение нейтронов и протонов ... аналогично движению электронов в сверхпроводниках», а сверхпроводимость – это сверхтекучесть заряженной жидкости. Отсюда и название. По-моему, весьма любопытный факт: объяснение свойств субмикроскопических сгустков протонов и нейтронов требует привлечения представлений, используемых при изучении объектов макроскопической физики – металлов и жидкого гелия.

Многие статьи из рассматриваемого нами цикла посвящены радиофизике, в частности сверхнизкочастотным (или сверхдлинным) волнам, частоты которых от 3 до 30 кГц (длины волн от 10 до 100 км). В статье «Радиоволны» сказано, что есть также диапазон крайне низких частот (КНЧ) с частотами в тысячу раз меньше: от 3 до 30 Гц.

Статья «Сверхнизкочастотные радиоволны» привлекла мое внимание потому, что «распространение радиоволн сверхнизкочастотного (СНЧ) диапазона происходит в волноводном канале, ограниченном поверхностью Земли и нижней кромкой ионосферы, высота которой в зависимости от времени суток и геофизических условий изменяется от 60 до 90 км». Уверен, вы уже знаете о существовании ионосферы – слоя ионизованных газов в верхней части

---

[1] *В исторической справке две фамилии: Г.Герц, в опытах которого впервые (1888) были получены электромагнитные волны с длиной волны λ в несколько десятков сантиметров, и А.С.Попов, который впервые (1895–99) применил электромагнитные колебания с $\lambda = 10^2 - 2\cdot10^4$ см для осуществления беспроволочной связи на расстоянии. Фамилии Маркони, в 1897 году получившего патент на изобретение радио, в статье нет. Попов же свое открытие не патентовал.*

[2] *Статья о высокотемпературных сверхпроводниках (ВТСП) названа в ФЭ так: «Оксидные высокотемпературные сверхпроводники». Название подчеркивает химический состав соединений, которые имеют аномально высокие критические температуры. Однако, скорее всего, такое название позволило включить в ФЭ необходимую статью уже после того, как вышел из печати 1-й том, куда она должна была попасть, если бы называлась ВТСП. Когда оксидные соединения «обнаружили» свои сверхпроводящие свойства (1986), подготовка к печати 1-го тома уже была закончена.*

Иллюстрация Л.Тишкова

атмосферы. Во 2-м томе ФЭ есть большая статья «Ионосфера» и небольшая специальная статья «Ионосферный волновод», упомянутый выше. Из них можно почерпнуть много интересных сведений. И еще одну статью рекомендую посмотреть, если вас заинтересовала роль ионосферы в распространении радиоволн: «Сверхдальнее распространение радиоволн». Кстати, она тоже принадлежит к «сверх». Мне кажется, рекомендуемые статьи уже доступны вам. Правда, надо научиться читать подобные статьи: запоминать утверждения и факты и откладывать на будущее строгое их объяснение.

В большинстве статей термин «сверх» имеет смысл количественного сравнения: нечто большее чего-то обычного. Например, сверхизлучение, сверхинжекция, сверхлюминесценция и т.п. Пожалуй, только сверхтекучесть и сверхпроводимость обозначают качественно новые явления. Однако не надо забывать старую истину: количество переходит в качество. Характерные примеры: сверхзвуковое течение и сверхсветовая скорость.

Сверхзвуковому течению посвящена большая статья, что неудивительно, так как «с изучением сверхзвукового течения связан ряд важных практических проблем, возникающих при создании самолетов, ракет, снарядов со сверхзвуковой скоростью полета...». В процитированной статье много схем, позволяющих понять основные утверждения статьи и, например, усвоить, какова аэродинамически совершенная (т.е. создающая относительно малое сопротивление) форма тела при сверхзвуковой скорости его движения.

Увидев статью «Сверхсветовая скорость», я подумал, что она будет посвящена движению заряженной частицы со скоростью, превышающей скорость света в среде и равной c/n, где c – скорость света в вакууме, а n – показатель преломления среды, в широком диапазоне длин волн превышающий единицу. Как известно, такое движение сопровождается излучением света, называемым излучением Черенкова – Вавилова. В конце статьи «Сверхсветовая скорость» действительно есть ссылка на статью с названием «Черенкова – Вавилова излучение» (она опубликована в 5-м томе).

Начнем читать статью: «Сверхсветовая скорость – скорость, превышающая скорость света. Согласно *относительности теории* [3], передача любых сигналов и движение материальных тел не может происходить со скоростью, большей скорости света в вакууме c. Однако...». Разъяснению, почему могут существовать движения со скоростями, большими c, и каковы они, посвящена статья.

Вот простой пример (он взят из обсуждаемой статьи). С помощью вращающейся электронной пушки (т.е. источника электронов) можно заставить вращаться электронный луч. Если ось вращения окружить экраном, реагирующим на падающий на него электронный луч, то пятно (след луча) будет двигаться по экрану со скоростью $R\Omega$, где R – расстояние от электронной пушки до экрана, а Ω – угловая скорость вращения. Ничто не мешает пятну двигаться по экрану быстрее скорости света. Но при движении пятна по экрану не переносится ни информация о состоянии экрана, ни энергия вдоль экрана. Энергия и информация о состоянии электронной пушки переносится электронами вдоль пучка, и, естественно, скорость переноса (скорость электронов в пучке) не может превосходить скорость света в вакууме.

Пятна на экране могут быть источниками света. Это означает, что можно создать источники света, движущиеся со скоростью, большей скорости света в вакууме. Можно, конечно, обойтись без электронного пучка: расположить вдоль линии лампочки и договориться зажигать их последовательно в таком темпе, чтобы источник света (зажженная лампочка) перемещался по линии со скоростью, большей c. Интерференционная картина, возникающая при этом, очень интересна и тщательно исследована учеными.

Еще примеры движения со сверхсветовой скоростью.

Если стенки трубы не поглощают и не пропускают электромагнитные волны (например, сделаны из сверхпроводника), то такую трубу называют волноводом. Волновод – обязательный элемент СВЧ-приборов. С помощью волноводов можно электромагнитную энергию направлять куда нужно. Нам предстоит понять, чем электромагнитные волны в волноводе отличаются от электромагнитных волн в свободном пространстве и, самое главное, с какой скоростью они движутся.

Для ответа на эти вопросы придется познакомиться с характеристиками волн. Прилагательное «электромагнитных» опущено не случайно. То, что будет сказано, относится к любым волнам, или, более торжественно, к любым волновым процессам.

Вы, наверное, знаете, что любая волна характеризуется частотой, обозначим ее греческой буквой ω, и длиной волны λ (опять выбрана греческая буква). Частота описывает изменение во времени, а длина волны – в пространстве.

Если есть волна, то это волна «чего-то», т.е. «что-то» совершает волновое движение. Например, в волне на поверхности воды в водоеме движутся (волнообразно) молекулы воды. В интересующем нас случае электромагнитных волн волновое движение совершают напряженность электрического и индукция магнитного полей. В электромагнитных волнах энергия все время «перекачивается» из электрического поля в магнитное и обратно, поэтому волны и называются электромагнитными.

Для волны любой природы простейшая форма зависимости «чего-то» от координат и времени имеет вид

$$\Psi\left(\vec{r}, t\right) = A\cos\left(\omega t - \vec{k}\,\vec{r}\right) \equiv A\cos\varphi, \tag{1}$$

где величина $\varphi = \omega t - \vec{k}\,\vec{r}$ (здесь функция времени t и радиуса-вектора $\vec{r}$) называется фазой. Выбрана она так, что $\varphi = 0$ при $t = 0$ и $\vec{r} = 0$ (выбор зависит от удобства). Вектор $\vec{k}$ называют волновым вектором, он направлен в сторону распространения волны (туда, куда волна бежит). Если выбрать направление оси X вдоль этого вектора, то зависимость фазы от координат заметно упростится:

$$\varphi = \omega t - kx. \tag{2}$$

---

[3] *Напечатаны эти слова курсивом, значит, есть статья с таким названием. Именно «относительности теория», а не «теория относительности». Слова переставлены, чтобы не было слишком много статей, начинающихся словом «теория». Кроме того, хотя порядок слов менее привычен, но зато содержательное слово стоит на первом месте.*

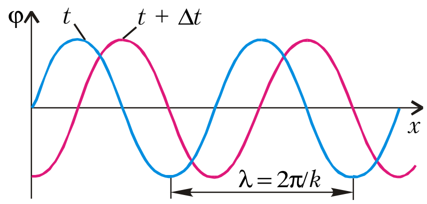

Рис.1

При изменении координаты x на длины волну λ значение «чего-то» вовсе не должно измениться (рис.1). Это значит, что фаза меняется на 2π. Следовательно, длина волнового вектора равна $k = 2\pi/\lambda$.

Заметим, формулы (1) и (2) описывают зависимость «чего-то» во всем пространстве. Простейшая волна заполняет собой все пространство. Задумайтесь, как трудно было поверить, что свет распространяется в виде волн...

Если зафиксировать время ($t = t_0$) и значение фазы ($\varphi = \varphi_0$), то получим

$$x = \frac{\lambda}{2\pi}\left(\omega t_0 - \varphi_0\right)$$

при произвольных значениях координат y и z. Другими словами, во всей плоскости

$$x = \frac{\lambda}{2\pi}\left(\omega t - \varphi\right)$$

фаза одна и та же. Ее так и называют плоскостью равной фазы, а волну называют плоской. Так как волна имеет вполне определенную частоту, к ее наименованию добавляют прилагательное «монохроматическая». Волны (1) и (2) – плоские монохроматические волны.

Теперь «освободим» время, а фазу будем «держать» равной φ_0. Тогда

$$x = \frac{\lambda}{2\pi}\left(\omega t - \varphi_0\right). \qquad (3)$$

Мы видим, что плоскость равной фазы перемещается со скоростью, равной $\lambda\omega/(2\pi)$. Ее называют фазовой скоростью. Итак,

$$u_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k} \qquad (4)$$

есть скорость распространения фазы волны.

Задумаемся: может ли плоская монохроматическая волна переносить сигналы и/или энергию из одной точки пространства в другую? Боюсь, многим вопрос покажется странным: все знают, что основную информацию нам приносят радиоволны, а телевизор или радиоприемник их лишь расшифровывают, делая информацию доступной органам чувств – зрению, слуху.

И все же правильный ответ на заданный вопрос: нет! Плоская монохроматическая волна переносить ни энергию, ни какой-либо сигнал не может. Согласно определению, она не только заполняет все пространство, но и всегда его заполняла и будет всегда заполнять (формула (1) справедлива не только при любом значении координаты, но и при любом значении времени).

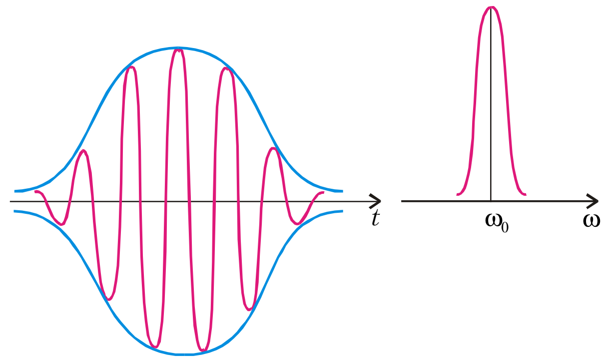

Рис.2

Переносить сигналы и энергию могут только более сложные образования из волн. Например, пакеты (группы) волн (рис.2). Пакет надо создать так, чтобы он был в пространстве ограничен. Тогда, перемещаясь в пространстве, пакет волн будет переносить информацию и энергию. Скорость распространения пакета волн не всегда совпадает с фазовой скоростью волны. Можно показать, что скорость распространения пакета, или группы, волн равна

$$u_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}. \qquad (5)$$

Ее так и называют групповой скоростью. Фазовая скорость может быть сколь угодно большой и, тем самым, служить примером сверхсветовой скорости. Групповая же скорость, в согласии с теорией относительности, не может превышать скорость света в пустоте ($u_{\text{гр}} \le c$).

Для электромагнитных волн в пустоте существует простое соотношение, связывающее частоту ω и волновой вектор $\vec{k}$:

$$\omega = ck, \qquad (6)$$

где, повторим, $c = 299792458$ м/с – скорость света в пустоте, одна из фундаментальных физических констант (значение взято из статьи «Фундаментальные физические константы»). Формулы (4)–(6) показывают, что в пустоте фазовая и групповая скорости электромагнитных волн совпадают: обе равны c.

Соотношение (6) столь привычно, что я его назвал простым соотношением. Научное открытие превращает чудо в тривиальность – эта мысль принадлежит Эйнштейну. Соотношение (6) открыл великий Дж.Максвелл, сформулировав свои знаменитые уравнения (уравнения Максвелла) электромагнитного поля. Причем константа c появилась в уравнениях Максвелла не как скорость света, а как величина, входящая в соотношения, связывающие изменение магнитного поля с изменением электрического и наоборот. Ее величину можно определить независимо от оптических измерений: например, по возникающей разности потенциалов при пересечении проводником линий магнитной индукции.

Небольшое отступление (а к волнам в волноводе мы еще вернемся).

Когда свет распространяется в прозрачной среде, соотношение (6) несколько усложняется:

$$\omega = \frac{c}{n}k. \qquad (7)$$

Величину n мы уже упоминали: это показатель преломления. Почему он так называется? Потому что от него зависит преломление света на границе двух сред. Наверное, все вы помните опыт Ньютона, показавшего, что солнечный свет представляет собой смесь разных цветов. Опыт продемонстрировал не только то, что солнечный свет состоит из различных цветов, но и то, что каждый из них преломляется по-своему. Это означает, что показатель преломления зависит от цвета, т.е. от частоты: показатель преломления n есть функция частоты ($n = n(\omega)$).

Ранее записанные формулы (4)–(7) дают возможность вычислить фазовую и групповую скорости:

$$u_{\text{фаз}} = \frac{c}{n}, \; u_{\text{гр}} = \frac{c}{n + \omega\dfrac{dn}{d\omega}}. \qquad (8)$$

Представьте себе физика-теоретика, который знает теорию относительности и поэтому уверен, что групповая скорость не должна превосходить скорость света в пустоте ($u_{\text{гр}} \le c$). Он впервые вывел формулу (8), смотрит на нее и недоумевает: что может заставить функциональную зависимость показателя преломления любого тела от частоты удовлетворять странному неравенству

$$n + \omega \frac{dn}{d\omega} \ge 1? \qquad (9)$$

Это – один из тех вопросов, ответ на который может добавить уважения к теоретической физике.

Оказывается, не прибегая ни к каким модельным соображениям, т.е. не делая никаких предположений о строении тела, можно доказать, что неравенство (9) всегда справедливо. Достаточно опереться лишь на два фундаментальных принципа: на принцип причинности и на принцип, утверждающий невозможность создания вечного двигателя второго рода. Мы нарочно сформулировали эти принципы столь абстрактно, чтобы подчеркнуть их общность. Конечно, хотелось бы продемонстрировать, как они позволяют установить строгое математическое неравенство. К сожалению, это отвлекло бы нас от основной темы статьи, но все же чуть конкретизируем.

Принцип причинности требует, чтобы реакция физического тела в любой момент времени t зависела от воздействий на тело, производимых в момент времени t или при $t_1 < t$ (до момента t, а не после). Запрет существования вечного двигателя второго рода в данном случае означает, что электромагнитная волна, распространяющаяся в равновесной среде, затухает, т.е. теряет свою энергию, а не приобретает ее (советую подумать, как в противном случае можно было бы построить вечный двигатель).

Если показатель преломления $n > 1$, то обе скорости (и фазовая, и групповая) меньше c, а если зависимость показателя преломления от частоты несущественна (т.е. можно считать, что $n = \text{const}$), то

$$u_{\text{фаз}} = u_{\text{гр}} = \frac{c}{n} < c .$$

В статье «Сверхсветовая скорость» (о которой, я боюсь, вы уже забыли) приводится пример, когда $u_{\text{фаз}} > c$, а $u_{\text{гр}} < c$: «Пример такой среды – полностью ионизованная *плазма* [4], у которой

$$n^2 = 1 - \frac{4\pi N e^2}{m\omega^2}, \qquad (10)$$

где e и m – заряд и масса электрона, а N – плотность электронов в плазме». Частота ω больше величины $\omega_{\text{пл}} = \sqrt{4\pi N e^2/m}$, называемой плазменной частотой. Следовательно, $n < 1$. Заметим, что при $\omega < \omega_{\text{пл}}$ показатель преломления – мнимая величина: волна не распространяется.

Используя записанные выше формулы, легко получить (для $\omega > \omega_{\text{пл}}$) красивое соотношение

$$u_{\text{фаз}} u_{\text{гр}} = c^2. \qquad (11)$$

Подсказка: удобно исходить из выражений, пригодных при произвольной зависимости $n = n(\omega)$. Согласно формуле (8),

$$u_{\text{фаз}} u_{\text{гр}} = \frac{c^2}{n^2 + \frac{1}{2}\omega \frac{dn^2}{d\omega}}.$$

Подставив значение (10) для n^2, убедимся в справедливости формулы (11).

Теперь вернемся к волноводам.

Плоская волна в волноводе «не помещается». Можно сказать, что в попытке «поместиться» волны отражаются от стенок волновода. Интерферируя, падающие и отраженные волны создают вполне определенную структуру. В плоскости сечения волновода волна никуда не бежит. Ее так и называют – стоячей. Бежит волна вдоль оси волновода, которую мы примем за ось Z. Фаза бегущей вдоль оси волновода волны мало чем отличается от фазы плоской монохроматической волны (см. формулу (2)):

$$\varphi = \omega t - kz, \ k \equiv k_z. \qquad (12)$$

Но все же отличается. В формуле (2) k – модуль волнового вектора, т.е. его полная длина. Именно эта величина входит в формулу (7), связывающую частоту с волновым вектором. В формуле (12) k – лишь проекция волнового вектора на ось волновода. Модуль волнового вектора должен включать и поперечные (относительно оси) компоненты вектора $\vec{k}$, поэтому связь между ω и $\vec{k}$ в данном случае сложнее:

$$\omega = c\sqrt{k_\perp^2 + k^2}, \ k \equiv k_z. \qquad (13)$$

Здесь $k_\perp$ – проекция вектора $\vec{k}$ на поперечное сечение волновода, она зависит от величины и формы сечения волновода. Если волновод создан двумя параллельными идеально отражающими плоскостями, то $k_\perp = (2l+1)\pi/(2d)$, где $l = 0, 1, \ldots$ – целые числа, а $2d$ – расстояние между плоскостями, образовавшими волновод. Обратите внимание, что $k_\perp$ в ноль не обращается, и при каждой форме волновода существует набор значений $k_\perp$, которые определяют форму стоячей волны в поперечном сечении волновода. Во всех случаях в наборе отсутствует ноль ($k_\perp \ne 0$), так как плоская волна «не помещается» в волновод.

Зная зависимость частоты от волнового вектора (13), нетрудно вычислить фазовую и групповую скорости волны в волноводе:

$$u_{\text{фаз}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{c^2 k_\perp^2}{\omega^2}}}$$

и (14)

$$u_{\text{гр}} = c\sqrt{1 - \frac{c^2 k_\perp^2}{\omega^2}}.$$

Фазовая скорость волны в волноводе всегда больше скорости света в пустоте c, а групповая, как ей положено, всегда меньше c. Соотношение (11) снова справедливо.

Обратите, пожалуйста, внимание на важный факт: по волноводу могут распространяться не любые волны. Волны должны иметь частоту, превышающую $ck_\perp$. Слишком длинные волны не могут «подобрать» себе необходимую стоячую волну, они буквально не помещаются в волноводе.

Еще одно (последнее) отступление.

Вы, уверен, слышали о соотношениях Луи де Бройля, связывающих корпускулярные и волновые представления:

$$\varepsilon = \hbar\omega, \ \vec{p} = \hbar\vec{k}, \qquad (15)$$

где ε – энергия частицы, $\vec{p}$ – ее

[4] *Курсив, напоминаю, означает, что в ФЭ можно прочитать статью о плазме. Статья большая, а следом за ней идут еще несколько статей, в названии которых основное слово – плазма.*

импульс (количество движения), $\hbar$ – знаменитая постоянная Планка. [5] Воспользовавшись соотношениями де Бройля, запишем зависимость (13) в корпускулярных терминах:

$$\varepsilon = \sqrt{m_\perp^2 c^4 + c^2 p^2}\,,\ m_\perp = \frac{\hbar k_\perp}{c}. \quad (16)$$

Если волна распространяется в пустоте, то из формул (6) и (15) следует равенство

$$\varepsilon = cp. \quad (17)$$

Признаюсь: это отступление написано не для того, чтобы нечто разъяснить. Оно призвано заинтересовать. Поэтому не сердитесь, если кое-что покажется «взятым с потолка». И еще. Обратите внимание: дальше некоторые слова будут напечатаны курсивом. Вы уже знаете, что таким терминам посвящены в ФЭ отдельные статьи. Но в этом разделе курсив означает нечто большее – я советую обратиться к этим статьям. Теперь можно продолжать.

Формула (17) описывает зависимость энергии *фотона* от его импульса в пустоте. А формула (16) описывает зависимость энергии фотона не в вакууме, а в волноводе. Фотон – квант электромагнитной энергии, частица, корпускула, или, как принято говорить, *квазичастица* (почти, якобы частица). Фотон – частица в том смысле, что энергия электромагнитного поля частотой ω есть сумма порций энергии величиной $\hbar\omega$. Энергии электромагнитного поля, меньшей $\hbar\omega$, не бывает.

Заметим, у фотона в вакууме если $p = 0$, то и $\varepsilon = 0$. О частицах, обладающих таким свойством, говорят, что их масса равна нулю. Таких частиц немало: кроме фотонов, есть несколько видов *нейтрино* и различные экзотические частицы, открытые в последние десятилетия при исследовании свойств *элементарных частиц*.

У фотона в волноводе, как ни странно, масса отлична от нуля. Конечно, по сравнению с электронной массой или с массой какой-либо другой более тяжелой частицы масса фотона в волноводе очень мала. Но все же отлична от нуля!

Убедиться в том, что масса фотона в волноводе (мы ее обозначили $m_\perp$) очень мала, несложно. Из таблицы в статье «Фундаментальные физические константы» можно найти все величины, относящиеся к элементарным частицам, и постоянную Планка $\hbar$. Для расчета примем $k_\perp = 1/R$, где R – радиус волновода. Как вы видите, уточнять значение $k_\perp$ и даже указывать, чему равен радиус волновода, нет необходимости: при любом разумном значении радиуса волновода масса фотона в волноводе во много раз меньше массы электрона.

Формула (16), если в ней заменить $m_\perp$ на m, и формула (17) – обе релятивистские. Они – следствие механики Эйнштейна (теории относительности). В классической механике Ньютона нет частиц с нулевой массой. Механика Ньютона – предельный случай механики Эйнштейна. Применима она при малых импульсах, т.е. при $p \ll mc$. Чаще это неравенство формулируют как признание того, что скорость частицы v мала по сравнению со скоростью света ($v \ll c$).

В механике Ньютона кинетическую энергию $\varepsilon_{кин}$ принято отсчитывать от нуля, считая, что $\varepsilon_{кин} = 0$ при $p = 0$. Поэтому, желая произвести предельный переход к классическому выражению для кинетической энергии, надо в формуле (16) прежде всего слева и справа вычесть mc^2 – энергию покоя:

$$\varepsilon_{кин} = \varepsilon - mc^2 = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} - mc^2.$$

Домножив и разделив правую часть на $\sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} + mc^2$, воспользовавшись алгебраической формулой для разности квадратов и положив в знаменателе $p = 0$ ($p \ll mc$), получим привычное выражение

$$\varepsilon_{кин} = \frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2}.$$

Формулы (15) и (16) – предвестники *квантовой механики*. Они сыграли важную роль: помогли Э.Шредингеру сформулировать свое знаменитое уравнение (уравнение Шредингера) – математическую основу квантовой механики (раньше ее называли волновой механикой). Но это – уже совсем другая тема...

---

[5] *Я попытался в ФЭ найти статью о соотношениях Луи де Бройля. Я искал «де Бройля соотношения», отбросил частицу «де», добавил имя. К счастью, в 5-м томе есть Предметный указатель. Проникнитесь уважением: он занимает 65 страниц, напечатан убористым шрифтом в четыре колонки. Предметный указатель позволил не перелистывать разные тома, пытаясь безуспешно отыскать необходимое слово. Прочитать о соотношениях Луи де Бройля можно в статье «Корпускулярно-волновой дуализм». Мне кажется, недостаток ФЭ – отсутствие Именного указателя.*