Деньги – деньги – деньги

Е.ФЕДОРОВ

– Мы не валютчики, – раздались отдельные обиженные голоса в театре, – но дело это немыслимое...

– Валютчик он! – выкрикивали в зале, – из-за таких-то и мы невинно терпим!

М.Булгаков. Мастер и Маргарита

Закон сохранения вещества в формулировке Михайлы Ломоносова звучит примерно так: «Ежели в каком-то месте чего-то убыло, то в другом месте того же самого прибыло». Решения задач, над которыми мы предлагаем вам подумать, точно указывают место, где «прибыло». Место, где «убыло», поищите сами.

Итак, речь пойдет о некоторых задачах финансового рынка. Еще точнее, мы будем говорить об элементарных математических моделях этого рынка. Несмотря на их простоту, можно даже сказать примитивность, исследование этих моделей позволяет получить качественную принципиальную картину рынка ценных бумаг и понять методы решения возникающих там проблем. Это типичный прием в математике – для изучения явления строится элементарная математическая модель, которая отражает основные принципиальные свойства реального явления. Изучив простую модель, можно попытаться распространить наработанные в ней методы на конкретную реальную ситуацию. Если модель удачная, то, как правило, это удается.

Полезно также из чисто педагогических соображений на элементарном уровне подойти к серьезной проблеме, чтобы уяснить в принципе саму проблему. Это очень важно для тех читателей журнала «Квант», которые в будущем собираются стать финансистами, экономистами, брокерами (ужасное слово). В экономике даже придуман специальный термин для той проблематики, о которой мы будем вести разговор, – *финансовая инженерия.*

Финансовый рынок

Рынок – как обмен товарами – существует давно. С тех пор как возникли деньги в качестве средства обмена товарами, появился новый товар – деньги. Если есть товар, то должны быть его разработчики, производители, продавцы и, что самое важное, покупатели. *Финансовый рынок* – это вторичный рынок, где товаром являются благородные металлы, деньги и валюты, ценные бумаги, в отличие от *основного* рынка, где товар — это продукция, услуга или работа. Мы будем говорить о *рынке ценных бумаг.* Хорошо известная формула основного рынка *«товар—деньги—товар»* на финансовом рынке принимает вид *«деньги—большие деньги—очень большие деньги».* Иногда даже справедлива такая уникальная цепочка: *«ничего—деньги—очень большие деньги»*. На финансовом рынке ценных бумаг свои проблемы определения цены товара.

В дальнейшем мы будем использовать некоторые термины из финансового жаргона. Наверняка кому-то они хорошо знакомы, для остальных напомним.

Валюта – ценная бумага или другое средство обмена товарами, например дукат или гульден; менее удачный пример – доллар; совсем неудачный – евро.

Акция – ценная бумага, выпускается фирмами с целью привлечения капитала. Текущая цена акции зависит от финансовых результатов деятельности фирмы и состояния рынка ценных бумаг. Владелец акции имеет право на участие в делах фирмы (одна акция – один голос) и на получение дивидендов (части прибыли).

Облигация – ценная бумага, например кредитный договор, долговое обязательство, банковский счет и т.д. В отличие от акций, цена которых хаотично меняется, цена облигации всегда растет – это безрисковый актив в стабильной ситуации.

Акции и облигации – *основные* (первичные) ценные бумаги на финансовом рынке ценных бумаг.

Модели рынка

В зависимости от того, какие бумаги есть в активе рынка, мы будем различать три модели:

A-рынок – рынок, в активе которого одна акция, цена ее хаотично меняется. Простой пример – колебания курса валюты, скажем евро. Предположим, «сегодня» курс евро (по отношению к какой-то другой валюте) A, тогда мы будем считать, что в следующий момент времени «завтра» (интервал изменения курса) он может принять одно из двух значений: или $A(1+m)$, или $A(1+n)$, где $-1 < n < m$, причем, вообще говоря, эти возможности не обязательно равновероятны (шансы не 1 : 1). Мы будем говорить, что сегодня известен прогноз цен на завтра. «Послезавтра» курс может быть $A(1+m)^2$, $A(1+m)(1+n)$ или $A(1+n)^2$, и так далее:

$$A \to \left\langle \begin{matrix} A(1+m) \to \left\langle \begin{matrix} A(1+m)^2 \\ A(1+m)(1+n) \end{matrix} \right. \\ A(1+n) \to \left\langle \begin{matrix} A(1+m)(1+n) \\ A(1+n)^2 \end{matrix} \right. \end{matrix} \right. \ldots$$

Итак, в нашей модели точная цена акции завтра неизвестна сегодня, она станет определенной лишь завтра. Сегодня известно, что нас может ожидать завтра. Эта модель имеет простую биноминальную структуру, а колебания цены акции здесь напоминают хаотичное блуждание частицы на прямой, т. е. одномерное броуновское движение.

B-рынок – рынок облигации, цена которой меняется по фиксированной ставке. Пример – банковский счет: пусть сегодня на счету капитал B, тогда завтра капитал будет $B(1+r)$, где r – процентная ставка банка. Послезавтра капитал будет $B(1+r)^2$ и так далее, после k-го дня капитал будет равен $B(1+r)^k$. Цена облигации завтра известна уже сегодня.

AB-рынок – рынок с двумя акти-

Иллюстрация Е.Силиной

вами: акцией и банковским счетом. Динамика изменения банковского счета происходит по закону $B_{k+1} = B_k(1+r)$, $B_k > 0$, где $r \geq 0$ – процентная ставка банка. Динамика цены акции имеет вид $A_{k+1} = A_k(1+p)$, $A_k > 0$, где p может принимать два значения m и n (вообще говоря, с разными вероятностями) и не зависит от k. Будем считать, что $-1 < n < r < m$. Условие $n > -1$ обеспечивает положительность цен акции A_k. Эта модель AB-рынка называется моделью Кокса-Росса-Рубинштейна и в частном случае при $r = 0$ дает модель A-рынка.

На реальном финансовом рынке на биржах вращается множество различных акций и облигаций. Модель AB-рынка с двумя активами достаточно хорошо отражает принципиальное состояние реального рынка ценных бумаг и помогает понять его основные проблемы.

Игроки на бирже

Задача игрока на рынке ценных бумаг состоит в том, чтобы оптимально размещать свой капитал в ценные бумаги – активы рынка, снижать до минимума риск операции.

Задача 1. *Курсы акций компаний «Microsow» и «Macrosow» в течение недели менялись так:*

	Microsow	Macrosow
Понедельник	\$400	\$250
Вторник	\$450	\$280
Среда	\$500	\$250
Четверг	\$450	\$300
Пятница	\$400	\$250
Суббота	\$450	\$300

На сколько процентов максимально можно было увеличить за эту неделю капитал, играя на изменениях курсов этих акций?

Решение. Определим коэффициент роста курса акции как отношение «цены завтра» к «цене сегодня». Если этот коэффициент больше 1, то капитал назавтра увеличивается, если меньше, то уменьшается. Если не покупать акции, то капитал остается неизменным. Значения коэффициентов такие:

	Microsow	Macrosow
Понедельник	9 : 8	28 : 25
Вторник	10 : 9	25 : 28
Среда	9 : 10	6 : 5
Четверг	8 : 9	5 : 6
Пятница	9 : 8	6 : 5
Суббота	–	–

В понедельник выгодно вложить деньги в акции «Microsow», поскольку $9/8 > 28/25$. Назавтра капитал увеличится в $9/8$ раза. Во вторник нужно придержать эти акции, так как $10/9 > 1 > 25/28$. В среду нужно продать акции «Microsow» и купить акции «Macrosow», поскольку $6/5 > 1 > 8/9$. В четверг выгодно акции «Macrosow» продать и ничего не покупать, поскольку нет прироста в курсах акций – оба коэффициента меньше 1. Если же не вкладывать деньги в акции, то можно остаться при своих. В пятницу нужно снова вложить деньги в акции «Macrosow», потому как $6/5 > 9/8$. Итак, прирост капитала за неделю составит

$$\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{6}{5}\cdot 1\cdot\frac{6}{5} = \frac{9}{5} = 1{,}8.$$

Значит, за неделю можно было увеличить капитал на 80%.

Портфели

Текущее распределение игроком капитала в активы рынка называется *инвестиционным портфелем* игрока.

Рассмотрим, например, модель AB-рынка в момент времени, когда стоимость акции равна \$100. Капитал \$1000 может быть распределен следующим образом:

$$1000 = 500 + 100\cdot 5 = x + 100y,$$

т. е. \$500 находятся на счете в банке и на другие \$500 приобретены 5 акций. Инвестиционный портфель $(x, y) = (500, 5)$. Получив информацию о динамике состояния рынка, игрок может сформировать новый портфель $(x_1, y_1) = (200, 8)$, купив 8 акций и оставив на банковском счете \$200.

Портфель (x, y): $C = x + 100y$, где $C > 0$, называется *самофинансируемым*, если изменение капитала C может происходить лишь за счет изменения цены акции и изменения на банковском счете. Заметим, что x или y при этом могут быть отрицательными, что означает взятие в долг. Если есть другое размещение капитала (перераспределенный самофинансируемый портфель) $C = x_1 + 100y_1$, то очевидно, что

$$(x - x_1) + 100(y - y_1) = 0.$$

Правильное управление портфелем приносит бóльшую прибыль.

Особенно заманчивы *арбитражные стратегии* управления портфелем, при которых прибыль может быть получена при нулевых вложениях капитала (безрисковый доход).

Пример. Доллар в Москве стоит 28 рублей, в Киеве – 5 гривен, обменный курс рубля к гривне 6.

Возможна такая стратегия:
берем в долг 2800 рублей,
покупаем в Москве на 2800 рублей \$100,
продаем в Киеве \$100 за 500 гривен,
меняем 500 гривен на 3000 рублей,
отдаем долг 2800 рублей,
имеем прибыль 200 рублей.

Стратегии

Рассмотрим модель AB-рынка с двумя активами: акцией и банковским счетом.

Пусть акция компании «Macrosow» сегодня стоит \$100. Известно, что завтра акция может стоить либо \$107, либо \$99, причем обе ситуации равновозможны (равновероятны, шансы 1 : 1). В таком случае мы будем говорить, что абсолютный прогноз по акции 107 : 99 (1 : 1), или относительный +7%–1% (1 : 1). Пусть процентная ставка банка 3% в день. Игрок хочет разместить \$400 на рынке.

Возможны такие стратегии.

1. *Робкий игрок* поместит весь капитал на банковский счет и завтра получит доход

$$D = \$400(1 + 0{,}03) = \$412,$$

а его прибыль будет

$$P = \$412 - \$400 = \$12.$$

2. *Рисковый игрок* вложит весь капитал в акции – купит 4 штуки по \$100. Если завтра цена акции будет \$107, то

$$D = 4\cdot\$107 = \$428,$$

$$P = \$428 - \$400 = \$28;$$

если же цена акции завтра будет \$99, то

$$D = 4\cdot\$99 = \$396,$$

$$P = \$396 - \$400 = -\$4.$$

Средний доход за операцию будет

$$d = (\$428 + \$396):2 = \$412,$$

а средняя прибыль

$$p = \$412 - \$400 = \$12.$$

3. *Безрисковый игрок* часть капитала x поместит на счет, часть – в

акции, т.е. сформирует портфель (x, y): $400 = x + 100y$, где y – количество акций. Напомним, что x или y могут быть отрицательными, что означает взятие в долг.

В случае удачи, если цена акции возрастет, капитал игрока завтра будет равен

$$1{,}03x + 107y = 1{,}03(400 - 100y) + 107y = 412 + 4y,$$

в противном случае –

$$1{,}03x + 99y = 1{,}03(400 - 100y) + 99y = 412 - 4y.$$

Риск исключен: в худшем случае, когда цена акции уменьшится до \$99, игрок сохранит капитал, т.е.

$$412 - 4y \geq 400, \text{ или } y \leq 3.$$

Если $y = 3$, то $x = 400 - 100y = 400 - 300 = 100$, т.е. безрисковый портфель $(x, y) = (100, 3)$. Купив 3 акции, игрок либо получит доход \$424 и прибыль \$24, либо останется при своих. Средняя прибыль \$12.

4. *Очень рисковый игрок – Джордж Сорос* – рискует всем своим капиталом, формируя портфель (x, y): $400 = x + 100y$, т.е. он готов потерять \$400, если цена акции упадет:

$$412 - 4y \geq 0, \text{ или } y \leq 103.$$

В случае успеха он получит адекватный риску доход

$$412 + 4y \leq 412 + 412 = 824.$$

Итак, портфель Дж.Сороса:

$$(x, y) = (-9900, 103).$$

Стратегия Дж.Сороса:

имея \$400, взять в долг \$9900;

на \$10300 купить 103 акции по \$100;

в случае удачи продать акции по \$107, получить \$11021;

вернуть долг с процентами \$10197;

получить доход \$11021–\$10197 = = \$824;

в случае неудачи продать акции по \$99, получить \$10197;

вернуть долг с процентами \$10197.

В случае удачи прибыль

$$P = \$824 - \$400 = \$424,$$

если неудача – убыток \$400. Средняя прибыль

$$p = (\$424 - \$400) : 2 = \$12.$$

Все стратегии дают одинаковую среднюю прибыль. Это говорит о сбалансированном состоянии рынка – средняя доходность по акции равна процентной ставке банка. Доходность игрока при удаче компенсируется риском неудачи. Стратегии наглядно иллюстрируют психологию игроков, что является очень важным фактором для успешной игры на финансовом рынке. Кто не рискует, тот…

Посмотрим, что произойдет, если состояние рынка изменится: например, ставка банка уменьшится до 1% или увеличится до 5%, а остальные условия останутся те же (см. таблицы). Рынок перестанет быть сбалансированным. В этих условиях средняя прибыль игроков разная. Мы привели результат – среднюю прибыль и портфель каждого игрока, а соответствующие выкладки и стратегии вы сможете по аналогии провести самостоятельно.

При $r = 1\%$

Игроки	p	(x, y)
Робкий	\$4	(400,0)
Рисковый	\$12	(0,4)
Безрисковый	\$8	(200,2)
Джордж Сорос	\$408	(–19800,202)

При $r = 5\%$

Игроки	p	(x, y)
Робкий	\$20	(400,0)
Рисковый	\$12	(0,4)
Безрисковый	\$40	(1400, –10)
Джордж Сорос	\$440	(21400, –210)

Согласитесь, что Дж.Сорос весьма обоснованно рискует капиталом.

Опцион

Опцион – ценная бумага, обладатель которой имеет право купить (продать) другие ценные бумаги (акции, валюту и т.д.) на оговоренных условиях. Акции, валюта, облигации относятся к *основным* (первичным) ценным бумагам; опционы – это *вторичные* (производные) ценные бумаги, они работают на уже созданном рынке основных ценных бумаг. По времени погашения опционы бывают двух типов: *европейские* – с фиксированной датой исполнения и *американские* – могут быть предъявлены к погашению в любой момент до фиксированной даты. Мы будем говорить о европейском опционе.

Рассмотрим модель A-рынка с одним активом. Вообще говоря, это частный случай модели AB-рынка, когда $r = 0$.

Пусть акция компании «Macrosow» сегодня стоит \$100. Известен прогноз на завтра 110 : 95 (1 : 1). Игрок приобретает опцион на покупку трех акций завтра по цене \$100. *Цена опциона* – это премия C продавцу, которую игрок уплачивает в день приобретения опциона. Это тот капитал, которым оперирует продавец, обслуживая опцион.

Если завтра акция будет стоить \$110, то игрок предъявляет опцион к погашению – покупает акции по \$100 и немедленно продает их по \$110 или требует выплаты разницы в ценах. Его доход в этом случае

$$D = 3(\$110 - \$100) = \$30,$$

а прибыль

$$P = \$30 - C.$$

Если же завтра акция будет стоить \$95, то он не предъявляет опцион к погашению. В этом случае игрок остается без дохода: $D = 0$, а его прибыль и вовсе отрицательна:

$$P = 0 - C = -C.$$

Средний доход за операцию

$$d = \$15,$$

а *средняя прибыль* (*прибыльность* опциона)

$$p = \$15 - C.$$

Ясно, что если цена опциона $C >$ > \$30, то он убыточен. Если же $C >$ > \$15, то можно получить прибыль в первом случае, но в среднем опцион убыточен. Чем меньше цена опциона C, тем выше для игрока прибыльность p опциона.

Минимальная премия C продавцу, при которой он сможет обслужить опцион, не рискуя дополнительным капиталом, называется *справедливой (рациональной) ценой опциона.*

В условиях нашего примера возникает

Задача 2. *Найдите справедливую цену опциона.*

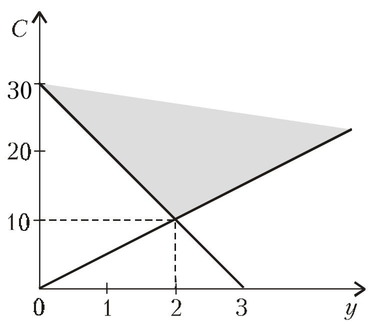
Решение. Пусть продавец, получив премию C, распределил ее следующим образом: $C = x + 100y$, т.е. часть премии $(C - x)$ вложил в акции. Завтра станет известна новая цена акции, продавец имеет новый капитал:

Цена акции	Капитал
\$100	$C = x + 100y$
\$110	$x + 110y = C + 10y$
\$95	$x + 95y = C - 5y$

Продавец выполнит опцион, если сумеет выплатить доход покупателю, не рискуя дополнительным капиталом, т.е если $C + 10y \geq 30$, $C - 5y \geq 0$.

В плоскости (y, C) этим условиям удовлетворяют все точки закрашенной области (см. рисунок). Минимальное значение $C = 10$ достигается при $y = 2$. Это и есть справедливая цена опциона.

Стратегия продавца: получив премию \$10, берет в долг (или вкладывает свои) \$190 и покупает 2 акции по \$100. Если завтра цена акции станет \$110, то продавец опциона,



реализовав 2 акции, имеет \$220; этого достаточно, чтобы вернуть долг \$190 (или свои) и выплатить доход \$30 покупателю. Если же акция будет стоить \$95, то после продажи двух акций у продавца будет ровно \$190 на возврат долга (или своих). В этой ситуации средняя прибыль покупателя \$5, а продавца \$0 – он не рисковал.

Инвестиционная цена

Рассмотрим модель AB-рынка с двумя активами – акцией и банковским счетом. Пусть процентная ставка банка r%, цена акции сегодня a и прогноз на завтра $+m\% - n\%$ (1 : 1), $-1 < n < r < m$. Допустим, участнику рынка предстоят выплаты завтра (погашение опциона или выполнение условий контракта и т.д.). Пусть M и N – суммы, которые он обязан выплатить в зависимости от новой цены акции $a(1+m)$ или $a(1+n)$ соответственно. В таких случаях говорят, что игроку предъявлено *платежное поручение.*

Минимальный капитал C, который гарантирует игроку выполнение платежного поручения (получение завтра капитала M или N в зависимости от новой цены акции соответственно), называется *инвестиционной ценой проекта.*

Справедливая цена опциона — это его инвестиционная цена.

Пусть игрок распределил сегодня капитал $C = x + ay$, тогда завтра его капитал будет

$$x(1+r) + ay(1+m) = \\ = C(1+r) + ay(m-r) = \\ = x(r-m) + C(1+m) = M$$

или

$$x(1+r) + ay(1+n) = \\ = C(1+r) + ay(n-r) = \\ = x(r-n) + C(1+n) = N.$$

Отсюда находим

$$C = \frac{Mz + N(1+z)}{1+r},\ y = \frac{M-N}{a(m-n)},$$

$$x = C - ay = \frac{Mq + N(1-q)}{1+r},$$

где $z = \dfrac{r-n}{m-n}$, $q = \dfrac{1+n}{n-m}$.

Портфель (x, y) обеспечивает стратегию, гарантирующую получение необходимого капитала завтра, т.е. выполнение платежного поручения. Нахождение таких стратегий (хеджей) — одна из важных задач финансовой математики.

Если выполнение платежного поручения предстоит на S-й день и величина выплаты при цене акции $A_{Sk} = a(1+m)^{S-k}(1+n)^k$ равна F_{Sk}, то нетрудно показать, что инвестиционная цена будет определяться формулой

$$C = \frac{1}{(1+r)^S} \sum_{k=0}^{S} F_{S_k} C_S^k z^{S-k} (1-z)^k,$$

где $C_S^k = \dfrac{S!}{k!(S-k)!}$.

Если платежное поручение на S-й день состоит в погашении опциона на покупку акции по цене K, то величина выплаты, очевидно, равна

$$F_{Sk} = \max\{A_{Sk} - K, 0\} = \\ = \max\left\{a(1+m)^{S-k}(1+n)^k - K, 0\right\}.$$

Подставив это значение в формулу инвестиционной цены, получим формулу Кокса-Росса-Рубинштейна справедливой цены опциона для модели AB-рынка:

$$C = a\sum_{k=0}^{k_0} C_S^k q^{S-k}(1-q)^k - \\ - \frac{K}{(1+r)^S}\sum_{k=0}^{k_0} C_S^k z^{S-k}(1-z)^k,$$

где $q = \dfrac{(1+m)z}{1+r}$,

$$k_0 = \left[\ln\frac{K}{a(1+m)^S} : \ln\frac{1+n}{1+m}\right].$$

Запись $[x]$ означает целую часть числа x – наибольшее целое, не превосходящее числа x.

Ремарка. В 1973 году были опубликованы статьи Ф.Блэка и М.Шоулса «Расчеты цены опционов и обязательства корпораций» и Р.Мертона «Теория расчета рациональной цены опциона». Насколько важными оказались изложенные результаты, можно судить по тому факту, что в 1997 году Р.Мертону и М.Шоулсу была присуждена Нобелевская премия (Ф.Блэк скончался в 1995 году). Это второй случай присуждения Нобелевской премии за работы по экономике математикам. Впервые этой чести удостоился академик Л.Канторович (СССР) в 1975 году за работу по экономике 1939 года «Математические методы организации и планирования производства». Совместно с ним премию получил Т.Купманс (США), труд которого был опубликован в 1951 году.