параллелограмм (очевидно, эта точка целая). Нетрудно показать, что точка O лежит в треугольнике AB_1C. Тогда из доказанного в предыдущем абзаце следует, что она лежит в пятиугольнике $A_1B_1C_1D_1E_1$, чего не может быть. Противоречие.

4. Пусть $b_i = 1_1 + \ldots + a_i$. Ясно, что $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$. Тогда

$$\frac{a_{l+1} + a_{k-m+2} + \ldots + a_k}{m} = \frac{b_k - b_l}{k-l}.$$

Рассмотрим на координатной плоскости точки $B_0(0,\,0)$, $B_1(1,\,b_1)$, $B_2(2,b_2)$, ..., $B_n(n,\,b_n)$. Тогда отношение $\frac{b_k - b_l}{k-l}$ будет равно тангенсу угла наклона прямой B_lB_k. Значит, условие $m_k > \alpha$ будет равносильно тому, что прямая, проходящая через B_k с углом наклона $\operatorname{arctg}\alpha$ (эту прямую назовем l_k), будет проходить выше хотя бы одной из точек B_l при $l < k$ (такую точку B_k будем называть *хорошей*). Выражение $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{\alpha}$ будет равно b_n/α, и это будет расстояние между точкой $(0,n)$ и точкой пересечения l_n с осью абсцисс. Докажем индукцией по количеству точек n, что это расстояние больше числа хороших точек. База очевидна. Если точка B_n не хорошая, то выбросим ее, при этом число хороших точек не изменится, а отрезок уменьшится (так как $b_{n-1} \le b_n$). Если же она хорошая, то пусть B_k – ближайшая (по оси абсцисс) точка, лежащая под l_n. Тогда выбросим все точки от B_{k+1} до B_n (они все хорошие), количество хороших точек уменьшится на $n-k$, а отрезок – больше, чем на $n-k$.

5. Доказываемое неравенство можно переписать в виде

$$\sin^{2n} x + \left(2^n - 2\right)\sin^n x \cos^n x + \cos^{2n} x \le \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^n.$$

При $\cos x \sin x = 0$ неравенство справедливо. Если $\cos x \sin x \ne 0$, оно с помощью замены $t = \operatorname{tg}^2 x$ сводится к неравенству

$$\left(t + \frac{1}{t}\right)^n \ge t^n + \frac{1}{t^n} + 2^n - 2,$$

справедливому при всех $t > 0$. Это неравенство легко доказывается по индукции.

6. Решение аналогично решению задачи 6 для 10 класса.

7. Пусть для определенности O лежит на продолжении отрезка AB за точку B (рис.9). Обозначим через P, Q точки пересечения KL с окружностью ω, через M, N – точки касания сторон BC и AD с ω. Проведем касательные l_1, l_2 к ω в точках P, Q. Обозначим через α угол между касательной l_1 (или l_2) и хордой PQ.

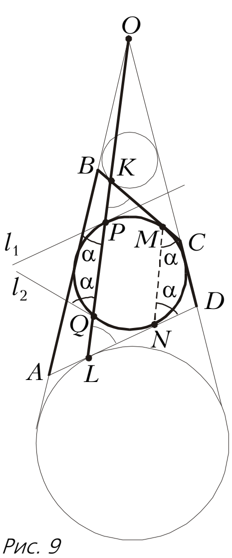

Рис. 9

При гомотетии с центром O, переводящей окружность ω_1 в ω, касательная BC в точке K перейдет в l_2; при гомотетии, переводящей окружность ω_2 в ω, прямая AD перейдет в l_1. Отсюда $BC \| l_2$, $AD \| l_1$ и, следовательно, $\angle LKC = \angle KLD = \alpha$. Кроме того, $\angle BMN = \angle ANM$, как углы между касательной и хордой. Отсюда получаем, что четырехугольник $KLNM$ – равнобокая трапеция и $\angle NMC = \angle MND = \alpha$. Итак, хорды PQ и MN параллельны и стягивают равные дуги величиной 2α. Отсюда следует, что средняя линия этой трапеции проходит через центр ω. Но середина KM совпадает с серединой BC (точки касания стороны треугольника со вписанной и вневписанной окружностями, как известно, симметричны относительно середины стороны), и также середина LN совпадает с серединой AD.

8. Предположим противное: пусть среди четырех клеток на пересечении любых двух строк и любых двух столбцов есть две клетки одинакового цвета. Для удобства будем нумеровать цвета числами от 1 до 4. Назовем *парой* две клетки разного цвета, лежащие в одном столбце. Назовем *совпадением* две клетки одинакового цвета, лежащие в одном столбце или в одной строке. Разделим пары на 6 типов по цветам входящих в них клеток: {1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {3,4}.
Рассмотрим две произвольные строчки. Докажем, что в этих двух строчках всего не менее 25 совпадений. Из сделанного предположения следует, что любые две пары с клетками в этих строчках должны иметь общий цвет. Нетрудно заметить, что возможны два принципиально различных случая: все пары содержат цвет 1 или есть пары типов [1,2}, {1,3} и {2,3}. Рассмотрим эти два случая.
Если все пары в наших двух строчках содержат клетку цвета 1, то всего пар не более, чем клеток цвета 1 в обеих строчках, т.е. не более 50. Значит, в рассматриваемых двух строчках не менее 50 совпадений.
Пусть есть пары типов {1,2}, {1,3} и {2,3}.В этом случае все клетки цвета 4 в наших строчках совпадают, и таким образом есть не менее 25 совпадений.
Итак, мы доказали, что в любой паре строчек не менее 25 совпадений, аналогичный результат верен и для любой пары столбцов. Таким образом, всего в нашем квадрате есть не менее $2 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} \cdot 25 = 25 \cdot 99 \cdot 100$ пар клеток одинакового цвета, лежащих в одной строке или в одном столбце. Но так как в любой строке и в любом столбце по 25 клеток каждого цвета , количество пар клеток одного цвета, лежащих в одном столбце или в одной строке, равно $200 \cdot \frac{25 \cdot 24}{2} \cdot 4 = 24 \cdot 100^2$. Учитывая, что $25 \cdot 99 > 24 \cdot 100$, мы приходим к противоречию.

XXXIV Всероссийская олимпиада школьников по физике

Теоретический тур

9 класс

1. $\omega^+ = A(l + \mu h)$, $\omega^- = A(l - \mu h)$, где $A = 2P/(RMgL\mu)$; в случае вращения против часовой стрелки при $l \le \mu h$ происходит заклинивание.

2. Решение этой задачи будет опубликовано в «Задачнике «Кванта».

3. $\lambda_2 = \lambda_1 - (c_1 - c_2)(t_0 - t_1) = 3{,}12 \cdot 10^5$ Дж/кг.

4. $U_{13} = 3{,}75$ В, $U_{23} = 11{,}25$ В; резисторы могут быть соединены «треугольником» или «звездой» в первом случае сопротивления резисторов равны R, $2R$ и $3R$, а во втором – R, $3R/2$ и $3R$.

10 класс

1. 1) $v_m \approx 2{,}1$ м/с; 2) при $v_0 > 0{,}38$ м/с, $\Delta = 3{,}5$ м/с.

2. Решение этой задачи будет опубликовано в «Задачнике «Кванта».

3. $t_{уст} \approx 65$ °С, $\alpha_{уст} \approx 0{,}35$. **4.** $Q = (2{,}0 \pm 0{,}2)p_0V_0$.

5. 1) $I_1 = I_2 = \left(\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1/2\right)/R$; 2) $\Delta W = C\left(\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_2\right)^2/4$;
3) $A_1 = C\mathcal{E}_1\left(\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_2\right)/2$, $A_2 = C\mathcal{E}_2\left(\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_2\right)$;
4) $Q = C\left(\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_2\right)^2/4$.

11 класс

1. $\Omega = 1{,}72$ с$^{-1}$, $A_2 = 0{,}29$ м.

2. Решение этой задачи будет опубликовано в «Задачнике «Кванта».

4. $U_0 = U_1\sqrt{3Tm_2/(\tau m_1)} = 1500$ В.

5. $R_1 = R\sqrt{r/(r+2R)}$.