либо в белый цвет. Разрешается перекрашивать в противоположный цвет любые три числа, одно из которых равно полусумме двух других. При каких N всегда можно сделать все числа белыми?

С.Токарев

8. См. задачу 8 для 10 класса.

Заключительный этап

9 класс

1. Различные числа a, b и c таковы, что уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + bx + c = 0$ имеют общий действительный корень. Кроме того, общий действительный корень имеют уравнения $x^2 + x + a = 0$ и $x^2 + cx + b = 0$. Найдите сумму $a + b + c$.

Н.Агаханов

2. Таня задумала натуральное число $X \le 100$, а Саша пытается его угадать. Он выбирает пару натуральных чисел M и N, меньших 100, и задает вопрос: «Чему равен наибольший общий делитель $X + M$ и N?». Докажите, что Саша может угадать Танино число, задав 7 таких вопросов.

А.Голованов

3. Пусть O – центр описанной окружности ω остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_1 с центром K проходит через точки A, O, C и пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Известно, что точки L и K симметричны относительно прямой MN. Докажите, что $BL \perp AC$.

М.Сонкин

4. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами. При этом из каждого города выходит хотя бы 3 дороги. Докажите, что существует циклический маршрут, длина которого (т.е. количество входящих в него дорог) не делится на 3.

Д.Карпов

5. На доску последовательно выписываются числа $a_1 = 1$, a_2, a_3, ... по следующим правилам: $a_{n+1} = a_n - 2$, если число $a_n - 2$ натуральное и еще не выписано на доску, в противном случае $a_{n+1} = a_n + 3$. Докажите, что все квадраты натуральных чисел появятся в этой последовательности при прибавлении 3 к предыдущему числу.

Н.Агаханов

6. См. задачу М1745 «Задачника «Кванта».

7. На медиане CD треугольника ABC отмечена точка E. Окружность S_1, проходящая через E и касающаяся прямой AB в точке A, пересекает сторону AC в точке M. Окружность S_2, проходящая через E и касающаяся прямой AB в точке B, пересекает сторону BC в точке N. Докажите, что описанная окружность треугольника CMN касается S_1 и S_2.

М.Сонкин

8. По окружности расставлены 100 натуральных чисел, взаимно простых в совокупности. Разрешается прибавлять к любому числу наибольший общий делитель его соседей. Докажите, что при помощи таких операций можно сделать все числа попарно взаимно простыми.

С.Берлов

10 класс

1. См. задачу М1743 «Задачника «Кванта».

2. Пусть $-1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$ и $x_1^{13} + x_2^{13} + \ldots + x_n^{13} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Докажите, что если $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, то

$$x_1^{13}y_1 + x_2^{13}y_2 + \ldots + x_n^{13}y_n < x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

О.Мусин

3. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC биссектриса острого угла между высотами AA_1 и CC_1 пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Биссектриса угла B пересекает отрезок, соединяющий ортоцентр треугольника ABC с серединой стороны AC, в точке R. Докажите, что точки P, B, Q и R лежат на одной окружности.

С.Берлов

4. Имеются пять внешне одинаковых гирь с попарно различными массами. Разрешается выбрать любые три из них A, B и C и спросить, верно ли, что $m(A) < m(B) < m(C)$ (через $m(x)$ обозначена масса гири x); при этом дается ответ «Да» или «Нет». Можно ли за девять вопросов гарантированно узнать, в каком порядке идут массы гирь?

О.Подлипский

5. Пусть M – конечное множество чисел. Известно, что среди любых трех его элементов найдутся два, сумма которых принадлежит M. Какое наибольшее число элементов может быть в M?

Е.Черепанов

6. Совершенное число, большее 6, делится на 3. Докажите, что оно делится на 9. (Натуральное число называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих делителей, отличных от самого числа, например $6 = 1 + 2 + 3$.)

А.Храбров

7. Даны две окружности, касающиеся внутренним образом в точке N. Хорды BA и BC внешней окружности касаются внутренней в точках K и M соответственно. Пусть Q и P – середины дуг AB и BC, не содержащих точку N. Окружности, описанные около треугольников BQK и BPM, пересекаются второй раз в точке B_1. Докажите, что BPB_1Q – параллелограмм.

Т.Емельянова

8. См. задачу М1744 «Задачника «Кванта».

11 класс

1. Найдите все функции f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, которые для всех $x, y, z \in \mathbf{R}$ удовлетворяют неравенству

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \ge \ge 3f(x+2y+3z).$$

Н.Агаханов, О.Подлипский

2. Докажите, что можно разбить все множество натуральных чисел на 100 непустых подмножеств так, чтобы в любой тройке a, b, c такой, что $a + 99b = c$, нашлись два числа из одного подмножества.

Д.Джукин, Ф.Петров, И.Богданов, С.Берлов

3. На координатной плоскости дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$ с вершинами в целых точках. Докажите, что внутри или на границе пятиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$ (рис.3) есть хотя бы одна целая точка.

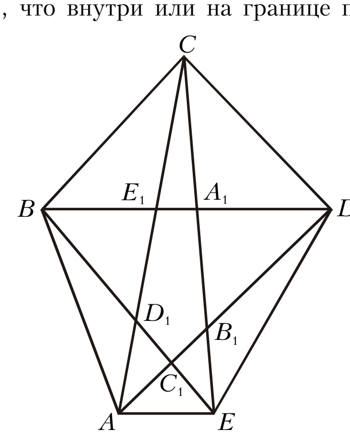

Рис. 3

В.Дольников, И.Богданов

4. Дана последовательность неотрицательных чисел a_1, a_2, ..., a_n. Для любого k от 1 до n обозначим через m_k величину

$$\max_{l=1,2,\ldots,k} \frac{a_{k-l+1} + a_{k-l+2} + \ldots + a_k}{l}.$$

Докажите, что при любом $\alpha > 0$ число