Задача 2. *Решите уравнение*

$$\frac{ax+3}{x+4}=\frac{x+6}{ax+1}.$$

Решение. После очевидных преобразований приходим к системе

$$\left(a^2-1\right)x^2+(4a-10)x-21=0,\ x+4\neq 0,\ ax+1\neq 0.$$

При $a^2=1$ уравнение не является квадратным, при $a=-1$ получаем $(-4-10)x-21=0$, т.е. $x=-\frac{3}{2}$, причем $-\frac{3}{2}\neq 4$, $-\frac{3}{2}\neq -1$. Итак, $x=-\frac{3}{2}$ при $a=-1$.

Если $a=1$, аналогично получаем, что $x=-\frac{7}{2}$. Итак, $x=-\frac{7}{2}$ при $a=1$.

Если $a^2-1\neq 0$, т.е. $a\neq\pm 1$, имеем

$$\frac{D}{4}=(2a-5)^2+21\left(a^2-1\right)=(5a-2)^2\geq 0,$$

отсюда

$$x_1(a)=\frac{3a+3}{a^2-1}=\frac{3}{a-1},\ x_2(a)=\frac{-7a+7}{a^2-1}=-\frac{7}{a+1}.$$

Составим таблицу:

	$x_1=\frac{3}{a-1}$	$x_2=-\frac{7}{a+1}$
$x+4=0$	$\frac{3}{a-1}+4=0,\quad a=\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{a+1}+4=0,\quad a=\frac{3}{4}$
$ax+1=0$	$\frac{3a}{a-1}+1=0,\quad a=\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{a+1}+1=0,\quad a=\frac{1}{6}$

Все полученные значения a отличны от ± 1. Вычислим для них значения корней:

$x_1\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{\frac{3}{4}-1}=-12$	$x_2\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{7}{\frac{1}{4}+1}=-\frac{28}{5}$
$x_1\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{3}{\frac{1}{6}-1}=-\frac{18}{5}$	

Оба корня совпадают при $D=0$, т.е. при $a=\frac{2}{5}$, тогда $x=x_1\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{\frac{2}{5}-1}=-5$.

Ответ: $x_1=\frac{3}{a-1}$, $x_2=-\frac{7}{a+1}$ при $a\in\boldsymbol{R}\setminus\left\{-1;\frac{1}{6};\frac{1}{4};\frac{2}{5};\frac{3}{4};1\right\}$; $x=-\frac{3}{2}$ при $a=-1$; $x=-\frac{18}{5}$ при $a=\frac{1}{6}$; $x=-\frac{28}{5}$ при $a=\frac{1}{4}$; $x=-5$ при $a=\frac{2}{5}$; $x=-12$ при $a=\frac{3}{4}$; $x=-\frac{7}{2}$ при $a=1$.

Упражнения

4. Дайте решению задачи 2 геометрическую интерпретацию.

5. Решение задачи 2 немного упростится, если использовать замену $x=1/u$. Испытайте ее.

6. Решите уравнение

$$\frac{ax+8}{x-1}=\frac{x+2}{ax+5}.$$

В следующей задаче корни квадратного уравнения «плохо» выражаются через коэффициенты, что создает некоторые дополнительные трудности.

Задача 3. *Решите уравнение*

$$\frac{x-7}{ax+4}=\frac{ax-2}{x+1}.$$

Решение. Уравнение равносильно системе

$$(x+1)(x-7)=(ax-2)(ax+4),\ ax+4\neq 0,\ x\neq -1. \qquad (2)$$

Уравнение системы приводится к виду

$$\left(a^2-1\right)x^2+2(a+3)x-1=0.$$

Пусть сначала $a^2-1=0\Leftrightarrow a=\pm 1$. Как и раньше, получаем, что $x=\frac{1}{4}$ при $a=-1$, $x=\frac{1}{8}$ при $a=1$.

При $a^2\neq 1$ имеем

$$\frac{D}{4}=(a+3)^2+\left(a^2-1\right)=2\left(a^2+3a+4\right)>0,$$

т.е.

$$x_{1,2}=\frac{-(a+3)\pm\sqrt{2a^2+6a+8}}{a^2-1}. \qquad (3)$$

(Катастрофа! Если подставить эти корни в соотношение $ax+4=0$, то после преобразований получим уравнение 4-й степени. К счастью, есть другой метод отбора корней.)

Подставим значения x, не входящие в область определения, в уравнение (2) и определим, решая получившееся уравнение, какие значения параметра a им соответствуют.

Пусть $ax+4=0$. Заметим, что $a\neq 0$ и $x=-\frac{4}{a}$. Подставляя в (2), имеем $\left(-\frac{4}{a}+1\right)\left(-\frac{4}{a}-7\right)=0$.

Если $-\frac{4}{a}+1=0$, то $a=4$; отбросываем корень $x=-1$.

Если $-\frac{4}{a}-7=0$, то $a=-\frac{4}{7}$; отбрасываем корень $x=7$.

Если $x+1=0$, то $x=-1$. Подставляя в (2), получим, что при $a=-2$ и при $a=4$ нужно отбросить корень $x=-1$.

Итак, при $a=-2$; $-\frac{4}{7}$; 4 один из корней, даваемых формулой (3), будет отброшен, но другой, возможно, будет оставлен. Эти корни можно определить по формуле (3), но проще воспользоваться теоремой Виета, так как один из корней квадратного уравнения – отбрасываемый – нам уже известен: $x_2=\frac{1}{1-a^2}\cdot\frac{1}{x_1}$.

При $a=-2$ получим $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{1-4}\cdot\frac{1}{-1}=\frac{1}{3}$.

При $a=-\frac{4}{7}$ получим $x_1=7$, $x_2=\frac{7}{33}$.

При $a=4$ получим $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{15}$.

Ответ: $x_{1,2}=\frac{-(a+3)\pm\sqrt{2a^2+6a+8}}{a^2-1}$ при $a\in\boldsymbol{R}\setminus\left\{-1;\frac{1}{6};\frac{1}{4};\frac{2}{5};\frac{3}{4};1\right\}$; $x=\frac{1}{3}$ при $a=-2$; $x=\frac{1}{4}$ при $a=$