Ф1733. *Корабль злобных пришельцев из космоса представляет собой цилиндр высотой 100 м и диаметром 100 м, стоящий вертикально на плоской поверхности. Единственной уязвимой точкой корабля является маленький люк, находящийся в центре верхнего круга, да и то только в том случае, если попавший в него снаряд имеет скорость не меньше 20 м/с и прилетает под углом к вертикали не больше 45° (данные получены из источников, заслуживающих полного доверия). В нашем распоряжении имеется маленькая пушка, находящаяся на уровне земли. При какой минимальной скорости вылета снаряда из ствола пушки мы сможем поразить корабль? Стрелять можно под любым углом и из любой точки поверхности земли.*

Удобно «обратить» траекторию снаряда – стрелять из конечной точки (люк) и смотреть, куда и с какой скоростью упадет снаряд. Если при скорости 20 м/с снаряд, вылетающий под углом 45°, перелетит край корабля и упадет на землю – задача будет сразу решена. Однако простой расчет показывает, что снаряд ударится о верхнюю плоскую поверхность цилиндра на расстоянии 40 м от точки выстрела. Ясно, что скорость придется увеличить так, чтобы при том же значении угла дальность превысила 50 м – радиус цилиндра. Для этого подойдет минимальная скорость примерно 22,4 м/с (значение g приближенно принято равным 10 м/с^2). Скорость снаряда внизу, на уровне земли, найдем из закона сохранения механической энергии – она получится 50 м/с.
Можно легко найти и оптимальную точку для стрельбы с поверхности земли (точку падения снаряда при выстреле сверху), но об этом в задаче не спрашивали.

З.Рафаилов

Ф1734. *Через неподвижный блок переброшена легкая нерастяжимая нить, к концам нити прикреплены два одинаковых груза массой M каждый. К боковой поверхности одного из грузов прицепился таракан массой m. Вначале грузы удерживали, причем тяжелый груз находился на H выше легкого. Грузы отпустили. В тот момент когда они поравнялись, таракан прыгнул перпендикулярно боковой поверхности своего груза и уцепился за двигавшийся вверх второй груз. Через какое время грузы снова поравняются? На какую максимальную высоту поднимется груз с тараканом?*

К тому моменту когда грузы в первый раз поравняются, таракан опустится на $H/2$ и скорости тел (по величине они все одинаковы) можно найти из энергетических соображений:

$$\frac{mgH}{2} = \frac{(2M+m)v_1^2}{2},$$

отсюда

$$v_1 = \sqrt{\frac{mgH}{2M+m}}.$$

Прыгая перпендикулярно боковой поверхности опускающегося груза, таракан имеет вертикальную скорость, равную скорости покидаемого им груза, а прыжок не оказывает влияния на скорость этого груза. Но после того как таракан уцепится за поверхность второго груза, скорость системы изменится, и часть энергии системы перейдет в тепло. Найдем новую скорость из закона сохранения импульса (тут не все так просто – есть закрепленный блок, который может «испортить» нам полный импульс, но, достаточно долго рассуждая на эту тему, можно убедить почти всех, что этого не произойдет). Итак, грузы движутся вместе со скоростью v_1, навстречу им с такой же по величине, но противоположной по направлению скоростью летит таракан. Скорость после такого «удара»

$$v_2 = v_1\frac{2M-m}{2M+m}.$$

Ускорение движущегося с этой начальной скоростью вверх тяжелого груза направлено вниз и равно

$$a = g\frac{m}{2M+m},$$

а время движения до верхней точки равно

$$\tau = \frac{v_2}{a} = \frac{(2M-m)v_1}{mg}.$$

Поравняются грузы еще через τ, значит, искомое время составит

$$t = 2\tau = 2(2M-m)\sqrt{\frac{H}{mg(2M+m)}}.$$

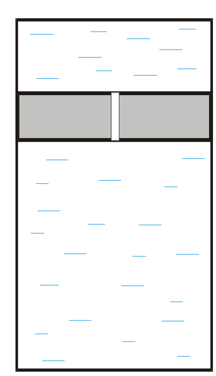
Высота подъема груза с тараканом относительно точки встречи будет

$$h = \frac{1}{2}v_2\tau = \frac{H}{2}\frac{(2M-m)^2}{(2M+m)^2}.$$

Условие этой задачи можно понять и по-другому: таракан прыгает так, что его скорость оказывается параллельной поверхности земли, т.е. он отталкивается от поверхности груза под некоторым углом, чтобы погасить свою вертикальную скорость. Этот вариант задачи для решения проще – два быстрых последовательных толчка в одну сторону и в другую оставляют скорости грузов прежними, а высота подъема относительно точки встречи получается равной $H/2$.

Р.Тараканов

Ф1735. *В высоком вертикальном цилиндрическом сосуде диаметром D, заполненном водой плотностью ρ, находится толстый тяжелый поршень массой M (см. рисунок), плотно прилегающий к боковым стенкам (вода через просвет между поршнем и стенками не протекает). По оси поршня сделано отверстие малого диаметра d (d ≪ D), через которое вода может перетекать из одной части сосуда в другую. Поршень отпускают, и через некоторое время его движение становится равномерным. Найдите скорость установившегося движения поршня. Вязкость жидкости невелика. Толщина поршня h.*



Обозначим скорость установившегося движения поршня через v. Скорость движения воды в отверстии во много раз больше – она приблизительно равна vD^2/d^2 (мы не будем делать различий между величинами D^2 и $\left(D^2-d^2\right)$ – по