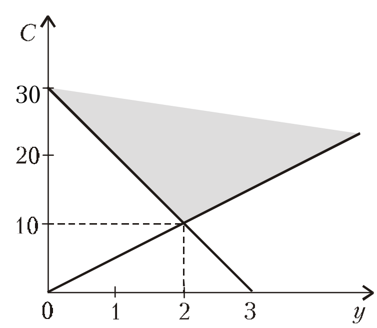
дующим образом: $C = x + 100y$, т.е. часть премии $(C - x)$ вложил в акции. Завтра станет известна новая цена акции, продавец имеет новый капитал:

Цена акции	Капитал
\$100	$C = x + 100y$
\$110	$x + 110y = C + 10y$
\$95	$x + 95y = C - 5y$

Продавец выполнит опцион, если сумеет выплатить доход покупателю, не рискуя дополнительным капиталом, т.е если $C + 10y \ge 30$, $C - 5y \ge 0$.

В плоскости (y, C) этим условиям удовлетворяют все точки закрашенной области (см. рисунок). Минимальное значение $C = 10$ достигается при $y = 2$. Это и есть справедливая цена опциона.

Стратегия продавца: получив премию \$10, берет в долг (или вкладывает свои) \$190 и покупает 2 акции по \$100. Если завтра цена акции станет \$110, то продавец опциона,



реализовав 2 акции, имеет \$220; этого достаточно, чтобы вернуть долг \$190 (или свои) и выплатить доход \$30 покупателю. Если же акция будет стоить \$95, то после продажи двух акций у продавца будет ровно \$190 на возврат долга (или своих). В этой ситуации средняя прибыль покупателя \$5, а продавца \$0 – он не рисковал.

Инвестиционная цена

Рассмотрим модель AB-рынка с двумя активами – акцией и банковским счетом. Пусть процентная ставка банка $r\%$, цена акции сегодня a и прогноз на завтра $+m\% - n\%$ $(1:1)$, $-1 < n < r < m$. Допустим, участнику рынка предстоят выплаты завтра (погашение опциона или выполнение условий контракта и т.д.). Пусть M и N – суммы, которые он обязан выплатить в зависимости от новой цены акции $a(1+m)$ или $a(1+n)$ соответственно. В таких случаях говорят, что игроку предъявлено *платежное поручение.*

Минимальный капитал C, который гарантирует игроку выполнение платежного поручения (получение завтра капитала M или N в зависимости от новой цены акции соответственно), называется *инвестиционной ценой проекта.*

Справедливая цена опциона — это его инвестиционная цена.

Пусть игрок распределил сегодня капитал $C = x + ay$, тогда завтра его капитал будет

$$x(1+r) + ay(1+m) = \\ = C(1+r) + ay(m-r) = \\ = x(r-m) + C(1+m) = M$$

или

$$x(1+r) + ay(1+n) = \\ = C(1+r) + ay(n-r) = \\ = x(r-n) + C(1+n) = N.$$

Отсюда находим

$$C = \frac{Mz + N(1-z)}{1+r}, \quad y = \frac{M-N}{a(m-n)},$$

$$x = C - ay = \frac{Mq + N(1-q)}{1+r},$$

где $z = \dfrac{r-n}{m-n}$, $q = \dfrac{1+n}{n-m}$.

Портфель (x, y) обеспечивает стратегию, гарантирующую получение необходимого капитала завтра, т.е. выполнение платежного поручения. Нахождение таких стратегий (хеджей) — одна из важных задач финансовой математики.

Если выполнение платежного поручения предстоит на S-й день и величина выплаты при цене акции $A_{Sk} = a(1+m)^{S-k}(1+n)^k$ равна F_{Sk}, то нетрудно показать, что инвестиционная цена будет определяться формулой

$$C = \frac{1}{(1+r)^S} \sum_{k=0}^{S} F_{Sk} C_S^k z^{S-k} (1-z)^k,$$

где $C_S^k = \dfrac{S!}{k!(S-k)!}$.

Если платежное поручение на S-й день состоит в погашении опциона на покупку акции по цене K, то величина выплаты, очевидно, равна

$$F_{Sk} = \max(A_{Sk} - K, 0) = \\ = \max\{a(1+m)^{S-k}(1+n)^k - K, 0\}.$$

Подставив это значение в формулу инвестиционной цены, получим формулу Кокса-Росса-Рубинштейна справедливой цены опциона для модели AB-рынка:

$$C = a \sum_{k=0}^{k_0} C_S^k q^{S-k} (1-q)^k - \\ - \frac{K}{(1+r)^S} \sum_{k=0}^{k_0} C_S^k z^{S-k} (1-z)^k,$$

где $q = \dfrac{(1+m)z}{1+r}$,

$$k_0 = \left[\ln \frac{K}{a(1+m)^S} : \ln \frac{1+n}{1+m} \right].$$

Запись $[x]$ означает целую часть числа x – наибольшее целое, не превосходящее числа x.

Ремарка. В 1973 году были опубликованы статьи Ф.Блэка и М.Шоулса «Расчеты цены опционов и обязательства корпораций» и Р.Мертона «Теория расчета рациональной цены опциона». Насколько важными оказались изложенные результаты, можно судить по тому факту, что в 1997 году Р.Мертону и М.Шоулсу была присуждена Нобелевская премия (Ф.Блэк скончался в 1995 году). Это второй случай присуждения Нобелевской премии за работы по экономике математикам. Впервые этой чести удостоился академик Л.Канторович (СССР) в 1975 году за работу по экономике 1939 года «Математические методы организации и планирования производства». Совместно с ним премию получил Т.Купманс (США), труд которого был опубликован в 1951 году.