

вами: акцией и банковским счетом. Динамика изменения банковского счета происходит по закону  $B_{k+1} = B_k(1+r)$ ,  $B_k > 0$ , где  $r \geq 0$  – процентная ставка банка. Динамика цены акции имеет вид  $A_{k+1} = A_k(1+p)$ ,  $A_k > 0$ , где  $p$  может принимать два значения  $m$  и  $n$  (вообще говоря, с разными вероятностями) и не зависит от  $k$ . Будем считать, что  $-1 < n < r < m$ . Условие  $n > -1$  обеспечивает положительность цен акции  $A_k$ . Эта модель АВ-рынка называется моделью Кокса-Росса-Рубинштейна и в частном случае при  $r = 0$  дает модель А-рынка.

На реальном финансовом рынке на биржах вращается множество различных акций и облигаций. Модель АВ-рынка с двумя активами достаточно хорошо отражает принципиальное состояние реального рынка ценных бумаг и помогает понять его основные проблемы.

## Игроки на бирже

Задача игрока на рынке ценных бумаг состоит в том, чтобы оптимально размещать свой капитал в ценные бумаги – активы рынка, снижать до минимума риск операции.

**Задача 1.** Курсы акций компаний «Microsow» и «Macrosow» в течение недели менялись так:

	Microsow	Macrosow
Понедельник	\$400	\$250
Вторник	\$450	\$280
Среда	\$500	\$250
Четверг	\$450	\$300
Пятница	\$400	\$250
Суббота	\$450	\$300

На сколько процентов максимально можно было увеличить за эту неделю капитал, играя на изменениях курсов этих акций?

**Решение.** Определим коэффициент роста курса акции как отношение «цены завтра» к «цене сегодня». Если этот коэффициент больше 1, то капитал на завтра увеличивается, если меньше, то уменьшается. Если не покупать акции, то капитал остается неизменным. Значения коэффициентов такие:

	Microsow	Macrosow
Понедельник	9 : 8	28 : 25
Вторник	10 : 9	25 : 28
Среда	9 : 10	6 : 5
Четверг	8 : 9	5 : 6
Пятница	9 : 8	6 : 5
Суббота	–	–

В понедельник выгодно вложить деньги в акции «Microsow», поскольку  $9/8 > 28/25$ . Назавтра капитал увеличится в  $9/8$  раза. Во вторник нужно придержать эти акции, так как  $10/9 > 1 > 25/28$ . В среду нужно продать акции «Microsow» и купить акции «Macrosow», поскольку  $6/5 > 1 > 8/9$ . В четверг выгодно акции «Macrosow» продать и ничего не покупать, поскольку нет прироста в курсах акций – оба коэффициента меньше 1. Если же не вкладывать деньги в акции, то можно остаться при своих. В пятницу нужно снова вложить деньги в акции «Macrosow», потому как  $6/5 > 9/8$ . Итак, прирост капитала за неделю составит

$$\frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{6}{5} \cdot 1 \cdot \frac{6}{5} = \frac{9}{5} = 1,8.$$

Значит, за неделю можно было увеличить капитал на 80%.

## Портфели

Текущее распределение игроком капитала в активы рынка называется *инвестиционным портфелем* игрока.

Рассмотрим, например, модель АВ-рынка в момент времени, когда стоимость акции равна \$100. Капитал \$1000 может быть распределен следующим образом:

$$1000 = 500 + 100 \cdot 5 = x + 100y,$$

т. е. \$500 находятся на счете в банке и на другие \$500 приобретены 5 акций. Инвестиционный портфель  $(x, y) = (500, 5)$ . Получив информацию о динамике состояния рынка, игрок может сформировать новый портфель  $(x_1, y_1) = (200, 8)$ , купив 8 акций и оставив на банковском счете \$200.

Портфель  $(x, y)$ :  $C = x + 100y$ , где  $C > 0$ , называется *самофинансируемым*, если изменение капитала  $C$  может происходить лишь за счет изменения цены акции и изменения на банковском счете. Заметим, что  $x$  или  $y$  при этом могут быть отрицательными, что означает взятие в долг. Если есть другое размещение капитала (перераспределенный самофинансируемый портфель)  $C = x_1 + 100y_1$ , то очевидно, что

$$(x - x_1) + 100(y - y_1) = 0.$$

Правильное управление портфелем приносит большую прибыль.

Особенно заманчивы *арбитражные стратегии* управления портфе-

лем, при которых прибыль может быть получена при нулевых вложениях капитала (безрисковый доход).

**Пример.** Доллар в Москве стоит 28 рублей, в Киеве – 5 гривен, обменный курс рубля к гривне 6.

Возможна такая стратегия: берем в долг 2800 рублей, покупаем в Москве на 2800 рублей \$100, продаем в Киеве \$100 за 500 гривен, меняем 500 гривен на 3000 рублей, отдаем долг 2800 рублей, имеем прибыль 200 рублей.

## Стратегии

Рассмотрим модель АВ-рынка с двумя активами: акцией и банковским счетом.

Пусть акция компании «Macrosow» сегодня стоит \$100. Известно, что завтра акция может стоить либо \$107, либо \$99, причем обе ситуации равновероятны (равновероятны, шансы 1 : 1). В таком случае мы будем говорить, что абсолютный прогноз по акции 107 : 99 (1 : 1), или относительный +7%–1% (1 : 1). Пусть процентная ставка банка 3% в день. Игрок хочет разместить \$400 на рынке.

Возможны такие стратегии.

1. *Робкий игрок* поместит весь капитал на банковский счет и завтра получит доход

$$D = 400(1 + 0,03) = 412,$$

а его прибыль будет

$$P = 412 - 400 = 12.$$

2. *Рисковый игрок* вложит весь капитал в акции – купит 4 штуки по \$100. Если завтра цена акции будет \$107, то

$$D = 4 \cdot 107 = 428,$$

$$P = 428 - 400 = 28;$$

если же цена акции завтра будет \$99, то

$$D = 4 \cdot 99 = 396,$$

$$P = 396 - 400 = -4.$$

Средний доход за операцию будет

$$d = (428 + 396) : 2 = 412,$$

а средняя прибыль

$$p = 412 - 400 = 12.$$

3. *Безрисковый игрок* часть капитала  $x$  поместит на счет, часть – в