Решения задач М1711—М1720, Ф1728—Ф1732

М1711. *В «Большой энциклопедии кроликов» 10 томов. Они стоят на полке почти по порядку: каждый том стоит либо на своем месте, либо на соседнем. Сколько таких расположений возможно?*

Будем считать, что в энциклопедии n томов и все вместе они занимают n положенных им мест на полке, хотя при этом некоторые тома могут занимать не свое место, а соседнее со своим. В общее количество таких расположений войдет и то расположение, в котором все тома стоят на своих местах (его мы потом вычтем).

Пусть $P(n)$ – количество таких расположений n томов; $P(1)=1$, $P(2)=2$. Разобьем все их на две группы; в первую группу отнесем те, в которых первый том стоит на своем месте, во вторую группу – остальные.

В первой группе столько расположений, сколько их возможно из $(n-1)$ тома (со второго до n-го), т.е. $P(n-1)$. Если первый том не на своем месте, то он стоит на второй позиции, а на первой позиции стоит второй том. Таких расположений столько же, сколько расположений остальных томов: со второго до n-го, т.е. всего $P(n-2)$.

Значит, имеет место соотношение $P(n) = P(n-1) + P(n-2)$. Используя его, можно, зная $P(1)$ и $P(2)$, найти $P(3)$, затем найти $P(4)$, и так далее. Получаем последовательность: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89. Итак, $P(10) = 89$.

Такая последовательность чисел $P(n)$ – это числа Фибоначчи.

Если есть желание вычесть то расположение, в котором все тома стоят на своих местах, то ответом для $n = 10$ будет 88.

Д.Калинин

М1712. *а) Несколько треугольников расположены на плоскости так, что каждые четыре из них имеют общую вершину. Докажите, что все треугольники имеют общую вершину.*

б) Несколько прямоугольников расположены на плоскости так, что каждые три из них имеют общую вершину. Докажите, что все прямоугольники имеют общую вершину.

а) На плоскости расположены треугольники T_1, T_2, … …, T_n $(n \geq 5)$, каждые четыре из которых имеют общую вершину. Сначала положим $n = 5$. Из треугольников T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 можно составить четыре четверки, содержащие треугольник T_1. Каждая такая четверка треугольников имеет общую вершину, и эта точка является вершиной треугольника T_1. Но у T_1 лишь три вершины, и значит, есть такая его вершина, которая является общей для двух из четырех четверок. Очевидно, что эта изобранная вершина треугольника T_1 является вершиной всех пяти треугольников.

Подобные рассуждения первого шага индукции проходят без изменений и для индуктивного перехода от n к $n + 1$.

В то же время нужно заметить, что в утверждении пункта а) слова «каждые четыре» нельзя заменить на «каждые три». В самом деле, четыре вершины квадрата являются вершинами четырех треугольников, каждые три из которых имеют общую вершину, но все четыре общей вершины не имеют.

б) Предварительно сделаем два элементарных геометрических замечания. Первое: четыре различные точки на плоскости, из которых каждые три являются вершинами прямоугольного треугольника, все вместе являются вершинами прямоугольника. Второе: два прямоугольника, имеющих три общие вершины, совпадают.

Теперь рассмотрим расположение прямоугольников P_1, P_2, …, P_n $(n \geq 4)$, каждые три из которых имеют общую вершину. Сначала положим $n = 4$. Допустим, что прямоугольники P_1, P_2, P_3 и P_4 не имеют общей вершины, хотя каждые три из них общую вершину имеют: точки A, B, C и D являются общими вершинами для всевозможных троек наших прямоугольников. Тогда всякие три из этих точек являются вершинами одного из прямоугольников и, в силу предварительных замечаний, $ABCD$ – это прямоугольник, который совпадает с каждым из четырех прямоугольников P_1, P_2, P_3 и P_4. Налицо противоречие с допущением.

Разберем случай при $n = 5$: допустим, что прямоугольники P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 не имеют общей вершины, хотя каждые три из них общую вершину имеют. Но тогда, в силу доказанного, каждые четыре из них имеют общую вершину. В этом случае точки A, B, C, D и E являются общими вершинами для всевозможных четверок прямоугольников. При этом каждые четыре из этих точек являются вершинами одного прямоугольника. Но таких пяти различных точек на плоскости существовать не может, значит, две из этих точек совпадают. Тогда эти совпавшие точки являются общей вершиной для всех пяти прямоугольников – противоречие. Индуктивный переход от n к $n + 1$ реализуется так же, как переход от 4 к 5.

В.Произволов

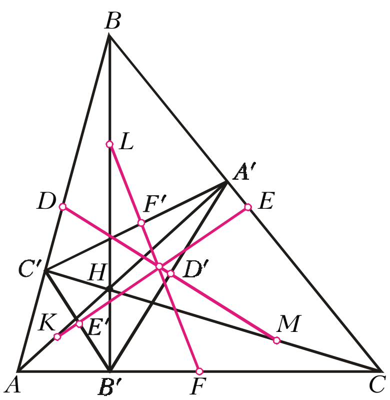
М1713. *На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты такие точки A', B', C', что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.*

Пусть D, E, F, D', E', F' – середины отрезков AB, BC, CA, $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$.

Докажите, что

а) прямые DD', EE', FF' имеют общую точку, причем эта точка, точка пересечения прямых AA', BB', CC' и точка пересечения медиан треугольника ABC лежат на одной прямой;
б) если в качестве прямых AA', BB', CC' взяты высоты треугольника ABC, то точка пересечения прямых DD', EE', FF' совпадает с центром окружности Эйлера (окружности девяти точек) треугольника ABC;
в) если прямые AA', BB', CC' – биссектрисы треугольника ABC, то их общая точка, общая точка прямых DD', EE', FF' и точка пересечения прямых, проходящих через вершины треугольника ABC и делящих его периметр пополам (точка Нагеля), лежат на одной прямой;
г) если прямые AA', BB', CC' делят периметр треугольника ABC пополам, то точка пересечения прямых DD', EE', FF' совпадает с центром масс контура треугольника ABC.

а) Точку пересечения прямых AA', BB', CC' обозначим H, середины отрезков AH, BH, CH – соответственно K, L, M (см. рисунок).
Воспользуемся теоремой Гаусса: если у четырехугольника нет параллельных сторон, то середины его диагоналей и середина отрезка, соединяющего точки пересечения противоположных сторон четырехугольника, лежат на одной прямой. (Докажите ее самостоятельно!)



Применяя эту теорему к четырехугольнику $A'HB'C$, приходим к выводу, что точки D, D', M лежат на одной прямой.
Точно так же на одной прямой лежат точки E, E', K и F, F', L.
Но отрезки DM, EK, FL соединяют, соответственно, середины противолежащих сторон и середины диагоналей четырехугольника $ABCH$, поэтому эти отрезки имеют общую точку, совпадающую с центром системы четырех равных точечных масс, три из которых находятся в вершинах треугольника ABC, а четвертая – в точке H (теорема Симсона – Жергона).
Так как центр масс системы A, B, C находится в точке пересечения медиан треугольника ABC, то центр масс системы A, B, C, H лежит на отрезке, соединяющем точку пересечения медиан треугольника ABC с точкой H, и делит этот отрезок в отношении 3:1 (считая от точки H).
б) Если H – точка пересечения высот треугольника ABC, то около четырехугольника $ABA'B'$ можно описать окружность с центром в точке D, поэтому треугольник $A'DB'$ – равнобедренный, а так как D' – середина отрезка $A'B'$, то $DD' \perp A'B'$.
Аналогично, $EE' \perp B'C'$ и $FF' \perp A'C'$, т.е. точка пересечения прямых DD', EE', FF' – это центр окружности, описанной около треугольника $A'B'C'$, а эта окружность и есть окружность Эйлера треугольника ABC.
в) Воспользуемся известной теоремой: центр окружности, вписанной в треугольник, совпадает с точкой Нагеля треугольника, вершинами которого служат середины сторон исходного треугольника.
Следовательно, если H – центр вписанной в треугольник ABC окружности, то H – точка Нагеля треугольника DEF. Но треугольник DEF гомотетичен треугольнику ABC с центром гомотетии в точке пересечения медиан обоих треугольников и коэффициентом гомотетии $-1/2$, поэтому точки Нагеля обоих треугольников и точка пересечения их медиан лежат на одной прямой.
Ранее было доказано, что отрезок, соединяющий точку H с точкой пересечения медиан треугольника ABC, делится точкой пересечения прямых DD', EE', FF' в отношении 3:1 (считая от точки H), так что эта же точка делит отрезок, соединяющий точку H с точкой Нагеля треугольника ABC, в отношении 1:3 (тоже считая от точки H).
Можно показать, что эта же точка делит пополам отрезок, соединяющий центр вписанной в треугольник ABC окружности с центром масс контура треугольника ABC.
г) Центр масс контура треугольника совпадает с точкой пересечения биссектрис треугольника, вершинами которого служат середины сторон исходного треугольника (см., задачу М1016).
Из этого и указанных выше соотношений следует нужное доказательство.
Ясно также, что центр масс контура треугольника делит пополам отрезок, соединяющий точку пересечения биссектрис треугольника и точку Нагеля.

И.Вайнштейн

М1714. *Докажите, что каждое из уравнений*
а) $(x^2+1)(y^2-1)=z^2$,
б) $(x^2-1)(y^2-1)=z^2$, *где* $x \ne y$,
в)* $(x^2+1)(y^2+1)=z^2$, *где* $x \ne y$,
имеет бесконечно много решений в натуральных числах x, y и z.

а) Домножим обе части очевидного тождества

$$(2u+1)^2-1=4u(u+1) \qquad (1)$$

на $u+1$; кроме этого, считая $u>0$, положим $t=\sqrt{u}$. Подставив $u=t^2$, получим

$$(t^2+1)\left((2t^2+1)^2-1\right)=\left(2t(t^2+1)\right)^2. \qquad (2)$$

А теперь возьмем в качестве t любое целое положительное число, положим

$$x=t,\ y=2t^2+1,\ z=2t(t^2+1) \qquad (3)$$

– и задача а) решена.
Аналогично решается и задача б): рассмотрев тождество (1) при $u<0$ и полагая $t=\sqrt{-u}$, мы, рассуждая как и выше, придем к тождеству

$$(t^2-1)\left((2t^2-1)^2-1\right)=\left(2t(t^2-1)\right)^2. \qquad (4)$$

Решая а) и б), можно было вместо (1) воспользоваться тригонометрией – например, так:

$$1-\cos^2 2x=1-\left(2\cos^2-1\right)^2=4\cos^2 x\left(1-\cos^2 x\right),$$

$$\left(1-\cos^2 x\right)\left(1-\cos^2 2x\right)=4\cos^2 x\left(1-\cos^2 x\right)^2.$$

Подставив $\cos 2x=2\cos^2 x-1$, получаем (4) при $u = t^2 \le 1$. Значит, (4) верно при всех u: многочлены, совпадающие на отрезке, совпадают всюду – поскольку многочлен (отличный от тождественного нуля) n-й степени имеет не более n вещественных корней. (О свойствах многочленов можно прочесть, например, в книге «Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика» – М.: Аванта+, 1999.)

Теперь подставим $u=-t^2$ в доказанное тождество

$$(u-1)\left((2u-1)^2-1\right)=4u(u-1)^2.$$

Мы получим (2).

Чтобы поменять в тождестве t^2 на $-\tau^2$, можно воспользоваться и комплексными числами, а именно, подстановкой $t=i\tau$, где $i^2=-1$. Такая подстановка корректна, поскольку многочлены в левой и правой частях тождества совпадают на всей комплексной плоскости.

С помощью тригонометрических функций мы легко получили (4) – тождество, в которое входят выражения t^2-1 и $2t^2-1$. Рассмотрим теперь аппарат, позволяющий получать непосредственно также и тождества типа (2).

Гиперболическими функциями называются:

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ \operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\ \operatorname{cth}x=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}},\ \ldots$$

(гиперболический синус, косинус, тангенс, котангенс, ...); они определены для всех значений x, исключая $\operatorname{cth}x$, который теряет смысл при $x=0$. Эти функции проявляют замечательную аналогию с тригонометрическими функциями.

Так, имеют место формулы (обратите внимание на знаки!)

$$\operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y,$$

$$\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y,$$

из которых при $y=x$, в частности, следует

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1,\ \operatorname{ch}2x=\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x,$$

$$\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x.$$

Докажем с помощью гиперболических функций (2).

В равенство $\operatorname{ch}^2 2x-1=\operatorname{sh}^2 2x$ подставим

$$\operatorname{ch}2x=1+2\operatorname{sh}^2x$$

и

$$\operatorname{sh}^2 2x=4\operatorname{sh}^2x\left(1+\operatorname{sh}^2x\right);$$

получим

$$\left(1+2u^2\right)^2-1=4u^2\left(1+u^2\right).$$

С помощью равенства

$$\operatorname{ch}2x=2\operatorname{ch}^2x-1$$

легко доказать и (4).

Все продемонстрированные приемы полезны при решении более сложной задачи – пункта в).

в) *Первый способ.* Воспользовавшись тождеством

$$\cos 3x=4\cos^3x-3\cos x, \qquad (4')$$

получим

$$1-\cos^2 3x=\left(1-\cos^2x\right)\left(4\cos^2x-1\right)^2,$$

$$\left(1-\cos^2x\right)\left(1-\cos^2 3x\right)=\left(1-\cos^2x\right)^2\left(4\cos^2x-1\right)^2.$$

Пользуясь полученным тождеством и (4′), приходим к формуле

$$\left(1-y^2\right)\left(1-\left(4y^3-3y\right)^2\right)=\left(1-y^2\right)^2\left(4y^2-1\right)^2. \qquad (4'')$$

Заменяя (как и выше, при решении а) и б)) y^2 на $-y^2$, получаем тождество

$$\left(y^2+1\right)\left(\left(4y^3+3y\right)^2+1\right)=\left(y^2+1\right)^2\left(4y^2+1\right)^2. \qquad (5)$$

Это тождество позволяет выписать некоторую бесконечную серию натуральных решений:

$$\left(n,\ 4n^3+3n,\ \left(n^2+1\right)\left(4n^2+1\right)\right).$$

Заметим, что эта серия не дает всех решений: например, справедливо равенство

$$\left(1^2+1\right)\left(41^2+1\right)=58^2. \qquad (6)$$

Заметим также, что тождество (4″) задает новую бесконечную серию натуральных решений уравнения пункта б).

Второй способ. Воспользуемся тождеством

$$\operatorname{sh}3x=3\operatorname{sh}x+4\operatorname{sh}^3x; \qquad (6')$$

отсюда

$$\operatorname{sh}^2 3x+1=\left(1+\operatorname{sh}^2x\right)\left(1+4\operatorname{sh}^2x\right)^2,$$

$$\left(\operatorname{sh}^2x+1\right)\left(\operatorname{sh}^2 3x+1\right)=\left(\left(\operatorname{sh}^2x+1\right)\left(4\operatorname{sh}^2x+1\right)\right)^2.$$

Пользуясь полученным тождеством и (6′), приходим к (5).

Третий способ. А теперь получим (5) с помощью комплексных чисел. Как и выше, мы будем искать какие-нибудь непостоянные многочлены A, B, C с целыми коэффициентами такие, что $A\neq B$ и

$$\left(A^2+1\right)\left(B^2+1\right)=C^2.$$

Достаточно найти многочлены D, F, G с целыми коэффициентами такие, что $G\neq\mathrm{const}$ и

$$D\neq\pm G,\ D+i=(F+i)^2(G-i): \qquad (7)$$

в этом случае

$$D^2+1=\left(F^2+1\right)^2\left(G^2+1\right),$$

$$\left(D^2+1\right)\left(G^2+1\right)=\left(\left(F^2+1\right)\left(G^2+1\right)\right)^2.$$

Легко видеть, что (7) выполняется в точности при $G\neq 0$, $F=2G$.

Положив $G=x$, $F=2x$, получим

$$(2x+i)^2(x-i)=D+i=4x^3+3x+i,$$

$$\left(\left(4x^3+3x\right)^2+1\right)\left(x^2+1\right)=\left(\left(4x^2+1\right)\left(x^2+1\right)\right)^2.$$

Напоследок подумайте: как можно легко догадаться до равенства (6)?

Кроме этого, докажите следующее усиление предложения пункта в): при любом натуральном n уравнение $\left(n^2+1\right)\left(y^2+1\right)=z^2$ имеет бесконечно много натуральных решений.

В.Сендеров

М1715. *Все натуральные числа от 1 до 2n записаны в последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ такой, что*

$$\left|a_1-a_2\right|+\left|a_2-a_3\right|+\ldots+\left|a_{2n-1}-a_{2n}\right|+\left|a_{2n}-a_1\right|=2n^2.$$

Докажите, что

$$\left|a_1-a_2\right|+\left|a_3-a_4\right|+\ldots+\left|a_{2n-1}-a_{2n}\right|=n^2.$$

Для произвольной расстановки натуральных чисел от 1 до $2n$ в последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ обозначим

$$S=\left|a_1-a_2\right|+\left|a_2-a_3\right|+\ \ldots+\left|a_{2n-1}-a_{2n}\right|+\left|a_{2n}-a_1\right|.$$

В результате раскрытия модуля в любом слагаемом этой суммы получим два натуральных числа – одно с плюсом, другое с минусом. Для того чтобы сумма S достигла наибольшего возможного значения, необходимо и достаточно, чтобы числа от 1 до n получали минусы, а числа от $n+1$ до $2n$ – плюсы. Тогда

$$S=2\left[(2n+2n-1+\ldots+n+1)-(n+n-1+\ldots+1)\right]=2n^2.$$

Значит, каждое слагаемое суммы модулей – это модуль разности двух натуральных чисел, одно из которых больше n, а другое не превосходит n. Но тогда

$$\left|a_1-a_2\right|+\left|a_3-a_4\right|+\ \ldots+\left|a_{2n-1}-a_{2n}\right|=$$

$$=(2n+2n-1+\ldots+n+1)-(n+n-1+\ldots+1)=n^2.$$

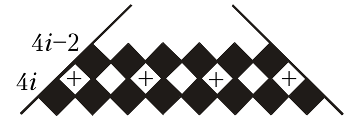
В.Произволов

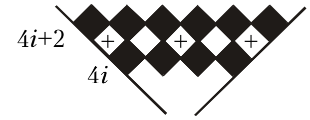
М1716. *В квадрате клетчатой бумаги размером $n\times n$ клеток отмечены N клеток таким образом, что каждая клетка квадрата (отмеченная или неотмеченная) имеет хотя бы одну отмеченную соседнюю клетку. Определите наименьшее возможное значение N, если соседними считать клетки, имеющие общую сторону.*

Рассмотрим случай четного n.

Сначала раскрасим доску в черный и белый цвета в шахматном порядке. Пусть $f(n)$ – это искомое число, а $f_\omega(n)$ – минимальное число белых клеток, которые должны быть отмечены таким образом, чтобы каждая черная клетка имела соседнюю отмеченную белую. Определим подобным образом $f_b(n)$. Благодаря симметричности шахматной доски ($n=2k$), мы имеем $f_\omega(n)=f_b(n)$; кроме этого, $f(n)=f_\omega(n)+f_b(n)$.

Было бы более удобно посмотреть на доску, развернув ее таким образом, чтобы главная черная диагональ (самая длинная) располагалась горизонтально. Тогда длины остальных черных диагоналей были бы 2, 4, …, $2k$, … …, 4, 2.





Зачеркнем «нечетные» клетки белых диагоналей, расположенных под черными диагоналями длины $4i-2$ в первом случае и под черными диагоналями длины $4i+2$ во втором случае (см. рисунок). В первом случае зачеркнутыми окажутся $2i$ белых клеток, а во втором случае $2i+1$ белых клеток. Таким образом, всего мы зачеркнем

$$2+4+\ldots+k+\ldots+3+1=\frac{k(k+1)}{2}$$

белых клеток. Легко видеть, что каждая черная клетка имеет белую зачеркнутую соседнюю клетку. Из этого следует, что

$$f_\omega(n)\le\frac{k(k+1)}{2}.$$

Рассмотрим $k(k+1)/2$ зачеркнутых белых клеток: у них нет общих черных соседних клеток, следовательно, нам нужно по крайней мере $k(k+1)/2$ черных отмеченных клеток с тем, чтобы «охватить» все эти белые клетки. Поэтому

$$f_b(n)\ge\frac{k(k+1)}{2}.$$

Отсюда мы имеем

$$f_\omega(n)=f_b(n)=\frac{k(k+1)}{2},$$

$$f(n)=k(k+1).$$

Аналогично доказывается, что

$$f(n)=\begin{cases}4k^2-1 \text{ при } n=4k-1,\\ (2k+1)^2 \text{ при } n=4k+1.\end{cases}$$

Е.Баранов, И.Воронович

М1717. *Две окружности Γ_1 и Γ_2, содержащиеся внутри окружности Γ, касаются Γ в различных точках M и N соответственно. Окружность Γ_1 проходит через центр окружности Γ_2. Прямая, проходящая через две точки пересечения Γ_1 и Γ_2, пересекает Γ в точках A и B. Прямые MA и MB пересекают Γ_1 в точках C и D соответственно. Докажите, что CD касается Γ_2.*

Лемма 1. Окружность k_1 касается окружности k внутренним образом в точке A и касается ее хорды MN в точке B. Пусть C – середина дуги MN окружности k, которая не содержит точку A. Тогда точки A, B, C лежат на одной прямой и $CA\cdot CB=CM^2$.

Доказательство. Гомотетия с центром в точке A, переводящая k_1 в k, переводит MN в касательную к окружности k, параллельную MN, т.е. в прямую, касающуюся окружности k в точке C. Таким образом, A, B, C коллинеарны. Для второй части заметим, что $\angle NMC\equiv\angle CAM$, поэтому ΔACM подобен ΔMCB, следовательно, $CA\cdot CB=CM^2$.

Лемма 2. Пусть окружность Γ_1 проходит через центр O_2 окружности Γ_2; t_1 и t_2 – (различные) общие касательные этих окружностей – касаются Γ_1 в точках C и D. Тогда прямая CD касается Γ_2.

Доказательство. Пусть t_1 касается Γ_2 в точке X. Так как O_2 – середина дуги CD, то имеем

$$\angle O_2CD = \frac{1}{2}\overset{\smile}{O_2D}, \text{ а } \angle XCD = \frac{1}{2}\overset{\smile}{CD} = \overset{\smile}{O_2D}.$$

Значит, $\angle XCD = 2\angle O_2CD$, откуда сразу следует утверждение леммы.

Решение задачи. Пусть O_1 и O_2 – центры окружностей Γ_1 и Γ_2 соответственно и t_1 и t_2 – их общие касательные. Пусть α, β – дуги, высекаемые на Γ прямыми t_1 и t_2 и расположенные так же, как в лемме 1.

Их середины, согласно лемме 1, имеют одинаковую геометрическую степень относительно окружностей Γ_1 и Γ_2; таким образом, они находятся на радикальной оси этих двух окружностей. Значит, A и B являются серединами дуг α и β. Из леммы 1 мы также можем сделать вывод, что C и D – это точки, в которых касательные t_1 и t_2 касаются Γ_1. По лемме 2 получаем, что CD касается Γ_2.

П.Кожевников

М1718. *Найдите все функции f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ такие, что*

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(y) - 1$$

для всех $x, y \in \boldsymbol{R}$.

Пусть A – множество значений функции f и $c = f(0)$. Положив $x = y = 0$, мы получим

$$f(-c) = f(c) + c - 1,$$

поэтому $c \neq 0$.

Легко найти сужение функции f на множество A: взяв $x = f(y)$, получим

$$f(x) = \frac{c+1}{2} - \frac{x^2}{2} \qquad (1)$$

для всех x из A.

Основной шаг доказательства состоит в том, чтобы показать, что множество разностей $x - y$, где $x, y \in A$, есть все множество $\boldsymbol{R}$. Для $y = 0$ мы имеем

$$\{f(x-c) - f(x) | x \in \boldsymbol{R}\} = \{cx + f(c) - 1 | x \in \boldsymbol{R}\} = \boldsymbol{R},$$

поскольку $c \neq 0$.

Теперь мы можем получить значение $f(x)$ для произвольного x: если мы выберем y_1, $y_2 \in A$ такие, что $x = y_1 - y_2$, и используем (1), то мы получим

$$f(x) = f(y_1 - y_2) =$$

$$= f(y_2) + y_1y_2 + f(y_1) - 1 = \frac{c+1}{2} - \frac{y_2^2}{2} + y_1y_2 +$$

$$+ \frac{c+1}{2} - \frac{y_1^2}{2} - 1 = c - \frac{(y_1 - y_2)^2}{2} = c - \frac{x^2}{2}. \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), мы получим $c = 1$, и поэтому

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

для всех $x \in \boldsymbol{R}$. Мы получили единственную функцию, которая удовлетворяет функциональному уравнению задачи.

М1719. *Последовательность a_1, a_2, a_3, … задана своим первым членом $a_1 = 1$ и рекуррентной формулой $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$*

а) Докажите, что $a_{100} > 14$.

б) Найдите $[a_{1000}]$, т.е. укажите такое целое число m, для которого $m \le a_{1000} < m + 1$.*

в) Докажите существование и найдите значение предела $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/\sqrt{n}$.

а) Возводим равенство $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ в квадрат и «отбрасываем лишнее»:

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2} > a_n^2 + 2.$$

Вспомнив, что $a_1^2 = 1$, получаем одно за другим неравенства $a_2^2 > a_1^2 + 2 = 3$, $a_3^2 > a_2^2 + 2 > 3 + 2 = 5$, и вообще (при $n > 1$),

$$a_n^2 > 2n - 1. \qquad (*)$$

В частности, $a_{100}^2 > 199 > 196 = 14^2$, что и требовалось.

б) *Ответ*: $[a_{1000}] = 44$.

При $n = 1000$ неравенство $(*)$ дает $a_{1000} > 1999 > 44^2$, так что $[a_{1000}] \ge 44$. Чтобы получить оценку сверху, введем величины b_n, такие что $a_n^2 = 2n - 1 + b_n$. В силу неравенства $(*)$, имеем $b_n > 0$ при $n > 1$. Далее, запишем формулу $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2}$ в виде

$$2n + 1 + b_{n+1} = 2n - 1 + b_n + 2 + \frac{1}{2n - 1 + b_n},$$

откуда

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2n - 1 + b_n} \le b_n + \frac{1}{2n - 1}.$$

По индукции из последнего неравенства следует, что

$$b_{n+1} \le b_1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-1}.$$

Поскольку $b_1 = 0$, имеем, в частности,

$$b_{1000} \le 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{1995} + \frac{1}{1997}.$$

Осталось оценить сумму, оказавшуюся в правой части последнего неравенства. Сгруппируем слагаемые:

$$b_{1000} \le 1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \ldots + \frac{1}{25}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{29} + \frac{1}{31} + \frac{1}{33} + \ldots + \frac{1}{79}\right) + \left(\frac{1}{81} + \frac{1}{83} + \ldots + \frac{1}{241}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{243} + \frac{1}{239} + \ldots + \frac{1}{727}\right) + \left(\frac{1}{729} + \frac{1}{731} + \ldots + \frac{1}{1997}\right).$$

(Принцип очень простой: в первой скобке три слагаемых, наибольшее из которых равно $1/3$; во второй – девять слагаемых, наибольшее из которых $1/9$; …; в пятой – 243 слагаемых, наибольшее $1/243$; наконец, в шестой скобке наибольшее слагаемое равно $1/729$, а слагаемых всего лишь 635.) Следовательно, $b_{1000} < 7$. Это позволяет утверждать, что

$$a_{1000}^2 < 2000 - 1 + 7 < 2025 = 45^2,$$

откуда $a_{1000} < 45$.

в) Использованный при решении пункта б) прием позволяет доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n/n = 0$. Поскольку $a_n = \sqrt{2n - 1 + b_n}$, получаем ответ:

$$\lim_{n\to\infty} a_n/\sqrt{n} = \sqrt{2}.$$

А.Спивак

М1720. *N одинаковых деревянных кубиков склеены между собой так, что каждые два из них склеены по грани или по участку грани. Докажите, что максимальное значение N равно шести.*

Приведем расположение шести деревянных кубиков, в котором каждые два склеены, как сказано в условии задачи (рис.1): три «черных» кубика стоят на плоскости стола, а три «красных» кубика стоят над ними (вид сверху!). Теперь выстроим цепочку наглядных представлений и соображений, из которых будет следовать, что $\max N = 6$.

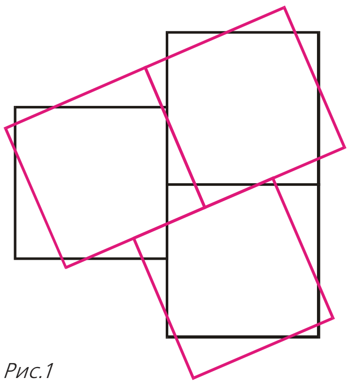


Рис.1

Определимся сначала с плоским случаем: если на столе лежат n одинаковых картонных квадратов, каждые два из которых склеены по стороне или по участку стороны, то $\max n = 3$, что очевидно (рис.2).

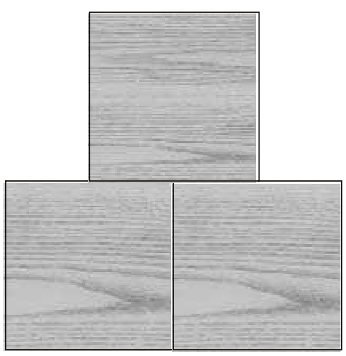


Рис.2

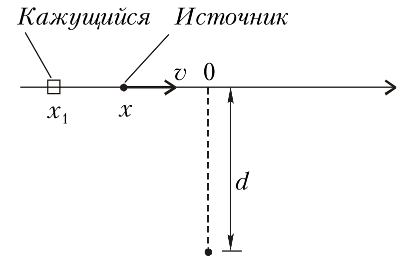
Будем говорить, что n деревянных кубиков (из имеющихся N) принадлежат одному слою, если найдется плоскость (стол), на которой все они стоят. Из вышесказанного следует, что $n \le 3$.

Нетрудно убедиться, что если все N кубиков параллельно расположены, т.е. каждый из них является результатом параллельного переноса другого, то $N \le 4$.

Пусть среди N кубиков нашлись два – кубики Q_1 и Q_2, которые не являются параллельно расположенными (транслятами), а плоскость π – общая плоскость двух соприкасающихся граней этих кубиков. Плоскость π определяет два слоя, одному из которых принадлежит кубик Q_1, а другому – кубик Q_2. Заметим, что всякий третий деревянный кубик обязан принадлежать одному из этих слоев. Но в каждом слое кубиков не больше трех, значит, $N \le 6$.

В.Произволов

Ф1728. *Источник света движется равномерно вдоль прямой со скоростью $v = 0{,}2\,c$, где c – скорость света. На расстоянии d от этой прямой находится наблюдатель. Запаздывание пришедшего к наблюдателю света приводит к тому, что движение источника кажется ему неравномерным. Каким будет максимальное наблюдаемое ускорение источника света?*



При выбранном начале координат (см. рисунок) и нулевом моменте при прохождении начала координат имеем

$$x = vt, \qquad \frac{x - x_1}{v} = \frac{\sqrt{x_1^2 + d^2}}{c}.$$

Выразим отсюда координату x_1 и вычислим скорость x_1' и ускорение x_1'':

$$x_1 = v\,\frac{c^2 t - \sqrt{c^2 v^2 t^2 + d^2\left(c^2 - v^2\right)}}{c^2 - v^2},$$

$$x_1' = \frac{vc^2}{c^2 - v^2}\left(1 - \frac{v^2 t}{\sqrt{c^2 v^2 t^2 + d^2\left(c^2 - v^2\right)}}\right),$$

$$x_1'' = -\frac{v^3 c^2 d^2}{\left(c^2 v^2 t^2 + d^2\left(c^2 - v^2\right)\right)^{3/2}}.$$

Видно, что максимальное *по модулю* ускорение будет при $t = 0$:

$$a_m = \left|x_1''(0)\right| = \frac{v^3 c^2 d^2}{d^3\left(c^2 - v^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{v^2}{d}\frac{v}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \approx 8{,}5 \cdot 10^{-3}\,\frac{c^2}{d}.$$

Если же говорить о действительно *максимальном* ускорении, то оно равно нулю и получается таким при $t = \pm\infty$ (т.е. задолго до нулевого момента и через очень большое время после него).

В.Шелест

Ф1729. *На гладком горизонтальном столе происходит лобовой удар двух одинаковых тел – одно из них вначале покоится, другое налетает на него со скоростью v_0. Куда и с какой скоростью будет двигаться после удара налетевшее тело, если при ударе в тепло переходит 1% от максимальной энергии деформации тел?*

Максимальная энергия деформации получается в тот момент, когда в процессе соударения скорости тел равны, т.е. эта энергия равна половине начальной кинетической энергии E_0 налетающего тела, а тепловые потери составляют $E_0/200$. Для скоростей тел после удара, в соответствии с законом сохранения импульса и выражением для кинетической энергии (с учетом потерь), можно записать

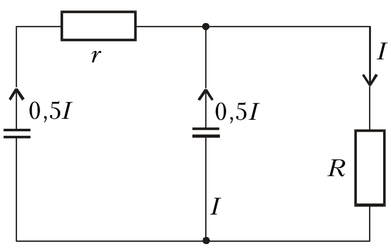
$$u_1 + u_2 = v_0, \quad u_1^2 + u_2^2 = 0{,}995\,v_0^2.$$

Скорость налетающего тела после удара должна получиться очень маленькой (без потерь энергии она была бы просто нулевой). С учетом этого, уравнения можно решать приближенно, отыскивая малый ответ. Окончательно получаем

$$u_1 \approx v_0/400 .$$

Р.Александров

Ф1731.[1] *Два одинаковых конденсатора емкостью C = = 10 мкФ каждый вначале заряжены до напряжения U_0 = 10 В и соединены параллельно при помощи длинных проводов общим сопротивлением r = 1 Ом. Резистор сопротивлением R = = 10 кОм подключают непосредственно к выводам одного из конденсаторов. Какое количество теплоты выделится в проводах за большое время?*



Это совсем простая задача. Начальная энергия системы равна

$$W_0 = 2\frac{CU_0^2}{2} = 10^{-3} \text{ Дж.}$$

Если ток через резистор R в некоторый момент составит I (см. рисунок), то (учитывая, что $r \ll R$) оба конденсатора разряжаются одинаковыми токами $0,5I$ и ток через сопротивление r равен $0,5I$. Видно, что почти вся тепловая мощность выделяется на резисторе R:

$$\frac{I^2R}{(0,5I)^2 r} = 40000 \gg 1 .$$

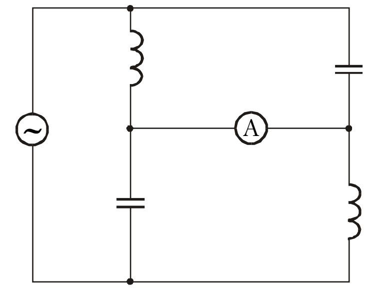
Ясно, что количество теплоты, выделившееся на сопротивлении r, можно найти так:

$$W_r \approx \frac{W_0}{40000} \approx 0,25 \cdot 10^{-7} \text{ Дж.}$$

З.Рафаилов

[1] *Решение задачи Ф1730 будет опубликовано позже.*

Ф1732. *К источнику переменного напряжения, частоту которого можно изменять в широких пределах, подключена цепь из двух одинаковых катушек индуктивностью L, двух конденсаторов емкостью C и амперметра переменного тока с очень малым сопротивлением (см. рисунок). Амплитуда напряжения источника U_0. На какой частоте ток через амперметр будет минимальным? Чему равна амплитуда этого тока? Элементы цепи считайте идеальными.*



Если заменить идеальный амперметр куском провода, то сразу станет видно, что к каждому из получившихся одинаковых параллельных колебательных контуров приложена половина напряжения источника. Тогда при $U = U_0 \cos \omega t$ ток через конденсатор равен

$$I_C = -\frac{1}{2} U_0 \omega C \sin \omega t ,$$

ток через катушку –

$$I_L = \frac{1}{2} \frac{U_0}{\omega L} \sin \omega t .$$

Ток через второй конденсатор, очевидно, такой же, как и через первый, а ток амперметра равен разности токов через катушку и конденсатор:

$$I_{\text{A}} = \frac{1}{2} U_0 \left(\omega C + \frac{1}{\omega L} \right) \sin \omega t .$$

Выражение в скобках минимально при равенстве слагаемых (можно взять и производную по частоте и приравнять ее нулю). В результате получим

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{CL}} , \; I_{\text{A}0} = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} .$$

А.Зильберман