Нет, ребята, все не так...

Квадрат размером 8×8 можно разрезать (рис. 1) на части, из которых складывается

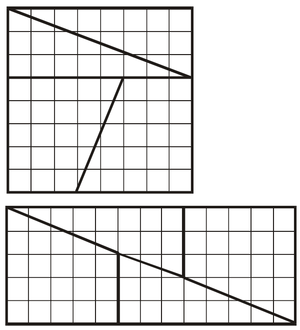

Рис.1

прямоугольник размером 5×13. Значит, $64 = 65$.

На рисунке 2 квадрат размером 13×13 разрезан на части, из которых легко сложить прямоугольник 8×21. Значит, $169 = 13^2 = 8\cdot21 = 168$.

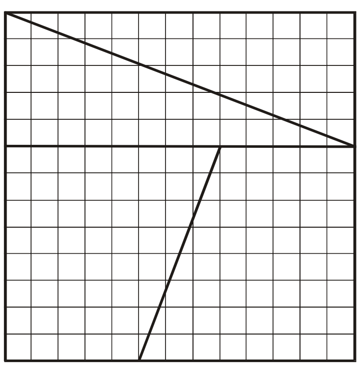

Рис.2

Есть и много других столь же эффектных разрезаний (рис.3).

* * *

Ваш учитель геометрии вряд ли согласится, что все треугольники равнобедренные. Тем не менее, это так!

Проведем биссектрису угла A треугольника ABC и серединный перпендикуляр к стороне BC (рис. 4,*а*). Из точки O их пересечения опустим перпендикуляры на стороны треугольника. Прямоугольные треугольники BOL и COL равны (по двум катетам). Значит, $BO = CO$. Треугольники NOA и

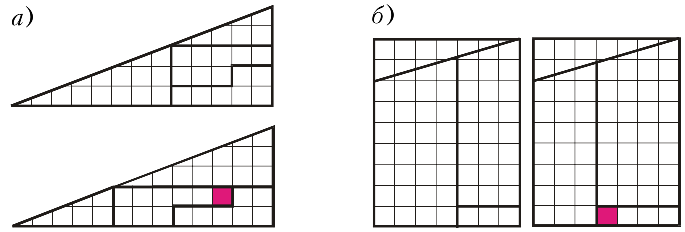

Рис.3

MOA тоже равны (по гипотенузе и острому углу). Поэтому $ON = OM$, так что треугольники BNO и CMO равны (по гипотенузе и катету). Это значит, что $BN = CM$ и

$$AB = AN + NB = AM + MC = AC,$$

так что $AB = AC$. Треугольник ABC равнобедренный!

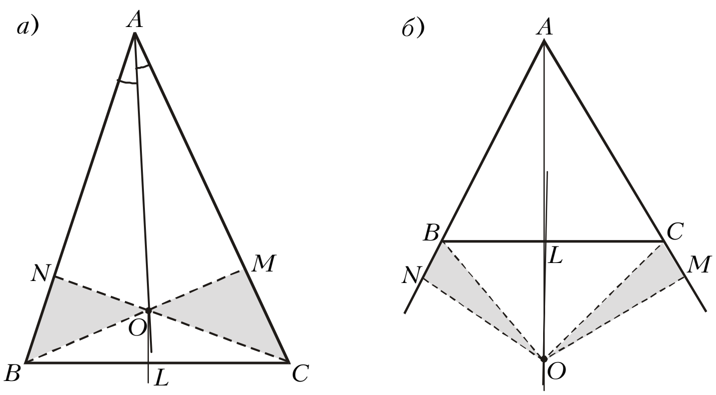

Рис.4

Вы можете возразить, что на точном чертеже точка O попадает не внутрь треугольника, а лежит вне. Более того, знаток геометрии даже скажет, что точка O – это середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC. На это у меня готов ответ (рис.4,*б*):

$$AB = AN - NB = AM - MC = AC,$$

всего лишь вместо суммы – разность. Треугольник все равно равнобедренный!

* * *

Многие знают, что если $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, то точкой, сумма расстояний от которой до вершин минимальна, является точка O пересечения диагоналей (рис.5). Доказать это очень легко: для любой точки M по неравенству треугольника имеем $AM + MC \ge AC$ и $BM + MD \ge BD$, откуда

$$AM + CM + BM + DM \ge AC + BD = AO + OC + BO + OD,$$

что и требовалось.

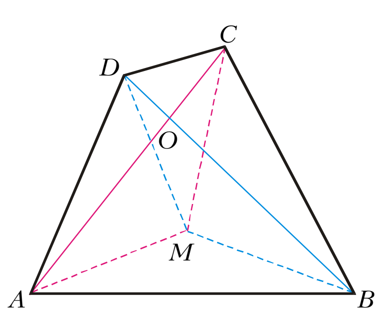

Рис.5

Пусть точки A и B неподвижны, а точки C и D стремятся к вершине E равностороннего треугольника ABE (рис.6). Точка O пересечения диагоналей тоже устремится к точке E. Мы доказали, что сумма расстояний от точки O до вершин четырехугольника минимальна. В пределе четы-

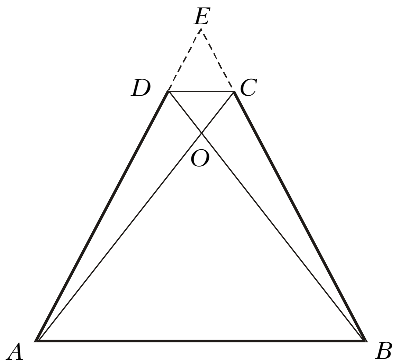

Рис.6

рехугольник превращается в треугольник ABE. Значит, сумма расстояний от предельного положения точки O – минимальная из всевозможных сумм расстояний от точек плоскости до вершин треугольника ABE.

Однако сумма расстояний от центра описанной окружности до вершин треугольника меньше суммы $AE + BE$. Противоречие!

* * *

Не все ладно и в алгебре. Рассмотрим уравнение

$$\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = -1.$$

Возведем обе части в куб, воспользовавшись формулой

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$$

при $a = \sqrt[3]{1+x}$ и $b = \sqrt[3]{1-x}$. Получаем

$$1 + x + 3\sqrt[3]{1-x^2} \cdot (-1) + 1 - x = -1,$$

т.е. $\sqrt[3]{1-x^2} = 1$, откуда $x = 0$. Подставьте $x = 0$ в исходное уравнение – получите равенство $2 = -1$.

* * *

Тригонометрии я тоже не доверяю. Вот, например, уравнение

$$3\sin x - \cos x = 1.$$

Воспользуемся формулами

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Обозначив $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, придем к уравнению

$$\frac{6t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1,$$

откуда $6t - 1 + t^2 = 1 + t^2$, т.е. $t = 1/3$. Мы нашли ответ: $x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi n$, где n – любое целое число.

Но удовлетворяющее данному равнению $x = \pi$ не представимо в таком виде.

* * *

Да ладно бы в тригонометрии. Неравенства – и те не позволяют расслабиться. Обозначим

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ldots$$

Очевидно,

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ \ldots \qquad (*)$$

Вычитая это равенство из предыдущего, получаем:

$$S - \frac{S}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots \ (**)$$

Поскольку $\frac{1}{2} < 1$, $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$, и вообще, $\frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1}$, то каждое слагаемое правой части формулы $(*)$ меньше соответствующего слагаемого формулы $(**)$. Следовательно,

$$\frac{S}{2} < S - \frac{S}{2},$$

что удивительно.

* * *

Если вы уже изучали интегралы и логарифмы, то сможете насладиться следующим парадоксом. Вычислим двумя способами $\int_1^2 (\ln 2x)' \, dx$. Во-первых, поскольку $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$, имеем

$$\int_1^2 (\ln 2 + \ln x)' \, dx =$$

$$= \int_1^2 (\ln x)' \, dx = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2.$$

Во-вторых, этот же интеграл можно вычислить, выполнив замену $t = 2x$:

$$\int_1^2 (\ln 2x)' \, dx = \frac{1}{2}\int_2^4 (\ln t)' \, dt = \frac{1}{2}\ln t \Big|_2^4 =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Итак, $\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2$.

* * *

К сожалению, логарифмы в школе проходят очень поздно, так что не все знакомы с ними. Для таких читателей показываю то же самое еще раз, но без логарифмов. С одной стороны,

$$\int_0^1 \left(x^2\right)' dx = x^2 \Big|_0^1 = 1.$$

С другой стороны, можно выполнить замену $x = t/2$. Имеем:

$$\int_0^1 \left(x^2\right)' dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(\frac{t^2}{4}\right)' dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{4}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}.$$

Итак, $1 = 1/2$. Теперь легко доказать, что все числа равны между собой. А это, согласитесь, очень помогает в жизни (особенно при денежных расчетах – только нужно использовать это в выгодную для себя сторону и успеть убежать).

* * *

Наконец, если вы знакомы с формулой Эйлера

$$\sin x = \left(e^{ix} - e^{-ix}\right)/(2i),$$

то можете легко доказать, что синус тождественно равен нулю:

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} =$$

$$= \frac{\left(e^{2\pi i}\right)^{x/(2\pi)} - \left(e^{-2\pi i}\right)^{x/(2\pi)}}{2i} =$$

$$= \frac{1^{x/(2\pi)} - 1^{x/(2\pi)}}{2i} = 0.$$

Аналогично можно доказать, что $\cos x$ тождественно равен 1. Вывод: как в элементарной, так и в высшей математике – одна путаница и обман налогоплательщиков.

Б.Споров