$$(\angle NAC + \angle MNA) + (\angle MNC + \angle MCN) = 180^\circ,$$

$$2(\angle MNA + \angle MNC) = 180^\circ.$$

Получим

$$\angle ANC = \angle MNA + \angle MNC = 90^\circ,$$

что и требовалось доказать.

**4.** Расположению карт в колоде сопоставим число, в котором цифр столько, сколько в колоде карт, причем на $k$-м месте слева стоит «1», если $k$-я карта снизу лежит рубашкой вверх, и «2» в противном случае. Тогда после каждого преобразования это число уменьшается. (Действительно, сравним полученное число с предыдущим. Среди всех цифр, которые изменились, выберем самую левую, т.е. найдем самый старший изменившийся разряд. Очевидно, в этом разряде цифра «2» сменилась на «1».)

Поскольку количество $n$-значных чисел из единиц и двоек конечно (равно $2^n$), в конце концов мы получим число, состоящее из одних единиц, что соответствует расположению всех карт рубашкой вверх.

**5.** *Указание*. Пусть $ABCD$ – произвольный прямоугольник, $O$ – произвольная точка. Тогда $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$ (это нетрудно вывести из теоремы Пифагора).

Пусть теперь $O$ – центр окружности задачи, $R$ – радиус этой окружности, $ABCD$ – прямоугольник задачи. Имеем: $OB = OD = R$. Следовательно, любая искомая точка $C$ лежит на окружности $\Omega$ с центром $O$ и радиусом $\sqrt{2R^2 - OA^2}$.

Обратно, возьмем любую точку $C'$ этой окружности. На отрезке $AC'$ как на диаметре построим окружность. Она пересекает данную окружность в двух точках; пусть $B$ – любая из них. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ задачи, лежащий по ту же сторону $AB$, что и точка $C'$. По доказанному $C$ лежит на окружности $\Omega$, т.е. совпадает с точкой $C'$.

**6.** Достаточно узнать число, записанное в одной из клеток. Заметим, что Леша знает разность любых двух чисел, записанных в соприкасающихся по точке клетках: $x - z = (x + y) - (y + z)$ (рис.8). Поэтому Леша знает и разность чисел, стоящих в любых двух клетках одного цвета. Осталось заметить, что из этих разностей ровно одна равна 63.

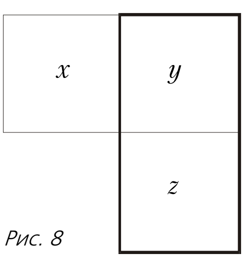

Рис. 8

**7.** Пусть $P$ и $Q$ – середины $AB$ и $CD$, $O_1$ и $O_2$ – центры окружностей, проходящих через точки $A, M, C$ и $B, M, D$ соответственно, $H_1$ и $H_2$ – проекции $O_1$ и $O_2$ на прямую $PQ$ (рис.9).

1) Точки $M$, $P$ и $Q$ лежат на одной прямой. В самом деле, прямые $PM$ и $QM$ содержат радиусы окружностей, касающихся в точке $M$, и, следовательно, перпендикулярны общей внутренней касательной к этим окружностям.

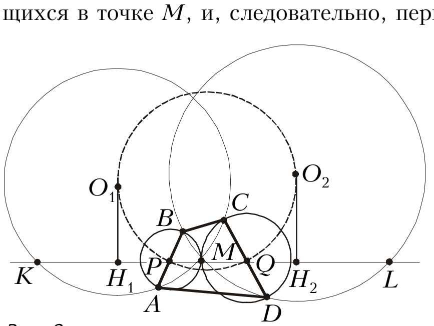

Рис. 9

2) $P$ и $Q$ лежат на окружности с диаметром $O_1O_2$. Действительно, $PO_1 \perp PO_2$, поскольку эти прямые – серединные перпендикуляры, соответственно, к отрезкам $MA$ и $MB$, угол между которыми прямой ($M$ лежит на окружности с диаметром $AB$). Аналогично, $QO_1 \perp QO_2$.

3) Ясно, что $KH_1 = H_1M$, $LH_2 = H_2M$ (диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам).

4) $PH_1 = QH_2$, так как проекция середины отрезка $O_1O_2$ делит отрезок $H_1H_2$ пополам; но эта проекция делит пополам и отрезок $PQ$. Наконец,

$$|MK - ML| = 2|MH_1 - MH_2| = 2|MP - MQ| =$$

$$= 2\left|\frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}CD\right| = |AB - CD|.$$

**8.** $S_{AOB} - S_{AH_AH_BB} = S_{AOK} - S_{KH_AH_BB} = S_{AOH_A} - S_{BOH_B}$ (рис.10).

Но $OH_A \cdot AH_A = OH_B \cdot BH_B = 1$ (точки $A$ и $B$ лежат на графике).

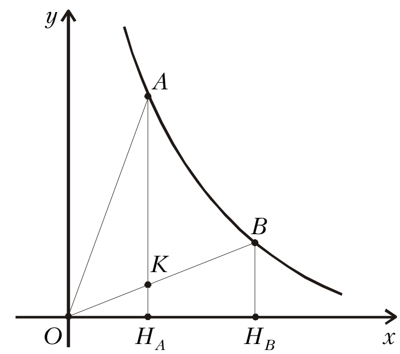

Рис. 10

**9.** Заметим, что $f(x) = (x+6)^2 - 6$. Отсюда видно, что

$$f\Bigl(f\Bigl(f\bigl(f(f(x))\bigr)\Bigr)\Bigr) = (x+6)^{32} - 6.$$

*Ответ*: $x = -6 \pm \sqrt[32]{6}$.

**10.** Без ограничения общности будем считать длину стороны клетки равной 1; докажем, что каждая из рассматриваемых сумм равна площади многоугольника.

Проведем, например, горизонтальные отрезки. Многоугольник разбивается ими на два треугольника и несколько трапеций; высота каждой из этих фигур равна 1. Выразим площади фигур через основания и высоты. Сложим эти площади и заметим, что каждый горизонтальный отрезок входит в сумму два раза.

**11.** *Ответ*: $2000^2 - 1$. Пусть $a = 2000m + n$, $b = 2000n + m$, $d$ – наибольший общий делитель $a$ и $b$. Тогда $d$ делит также числа $2000a - b = (2000^2 - 1)m$ и $2000b - a = (2000^2 - 1)n$. Поскольку $m$ и $n$ взаимно просты, то $d$ делит $2000^2 - 1$. С другой стороны, при $m = 2000^2 - 2000 - 1$, $n = 1$ получаем $a = (2000^2 - 1)(2000 - 1)$, $b = 2000^2 - 1 = d$.

**12.** *Ответ*: 0. *Указание*. График функции $|\sin kx|$ на отрезке $[0; \pi]$ состоит из $k$ одинаковых «шапочек», которые получаются из графика функции $\sin x$ на том же отрезке путем сжатия к оси ординат в $k$ раз. При этом площадь под графиком также уменьшается в $k$ раз. Как следствие, суммарная площадь под $k$ «шапочками» одинакова при любом натуральном $k$.

**13.** *Ответ*: может. Многочлен $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ имеет корень $t$, больший 0, поскольку $P(0) < 0$ и $P(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Тогда $t^3 = t^2 + t + 1 > t^2 + t$. Возьмем длины палочек равными $t^3$, $t^2$, $t$. После первого отпиливания получим палочки с длинами $t^2$, $t$, 1. Так как отношение длин не изменилось, процесс будет продолжаться бесконечно.

**14.** *Ответ*: а) не могут; б) могут.

а) Пусть $N$ – число игроков, $M = [N/2]$. Игроков, занявших первые $M$ мест, назовем сильными, а остальных – слабыми (между участниками с одинаковой суммой очков места распределяются произвольно). Пусть $X$ – число правильных партий между сильными и слабыми. Сумма очков, набранных сильными во встречах между собой, равна $M(M-1)/2$, а во встречах со слабыми – не больше $X$. Поэтому средний результат сильного не больше $(M-1)/2 + X/M$. Аналогично, средний результат слабого не меньше $(N-M-1)/2 + (M(N-M) - X)/(N-M)$. Если есть неправильные партии, то не все игроки набрали поровну очков, и средний результат сильного больше, чем слабого. Отсюда $X > M(N-M)/2 >$