скольку $V = 365v$, то $t = 365$, т.е. один слон выпьет все озеро за год.

Тригонометрические тождества

4. а) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ или $\arcsin(3/5) + 2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

5. 5.

6. $[-13; 13]$.

13. Нужно. Правильный ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$ или $\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi k$, где k – целое число.

14. $y_2 = (x\cos\alpha - y\sin\alpha)\sin\beta + (x\sin\alpha + y\cos\alpha)\cos\beta$.

15. а) $(x+3)^2 + y^2 = 4$; б) $\left(x + 3/\sqrt{2}\right)^2 + \left(y - 3/\sqrt{2}\right)^2 = 4$.

16. Сначала выполним поворот на угол φ по часовой стрелке. Прямая при этом перейдет в ось абсцисс, а точка $(x; y)$ – в точку $(x\cos\varphi + y\sin\varphi; y\cos\varphi - x\sin\varphi)$. При симметрии относительно оси абсцисс меняется знак ординаты, так что получаем точку $(x\cos\varphi + y\sin\varphi; -y\cos\varphi + x\sin\varphi)$. При повороте на угол φ эта точка переходит в точку, абсциссу которой вычисляем по формуле

$$(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\cos\varphi - (-y\cos\varphi + x\sin\varphi)\sin\varphi =$$
$$= x\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) + 2y\sin\varphi\cos\varphi = x\cos 2\varphi + y\sin 2\varphi.$$

Аналогично вычисляем ординату:

$$(-y\cos\varphi + x\sin\varphi)\cos\varphi + (x\cos\varphi + y\sin\varphi)\sin\varphi =$$
$$= y\left(-\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + 2x\sin\varphi\cos\varphi = -y\cos 2\varphi + x\sin 2\varphi.$$

17. а) $(-x; -y)$; б) $(2a - x; 2b - y)$; в) $(1 - y; 1 - x)$;
г) $\left(2b\sin 2\varphi + x\cos 2\varphi + y\sin 2\varphi;\ 2b\cos^2\varphi - y\cos 2\varphi + x\sin 2\varphi\right)$.

18. $y^2 = x^2 + 2$. **19.** $7x^2 + 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16$.

Неравенство Караматы

1. Требуется доказать, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geq k\frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n}.$$

Сводя подобные слагаемые, получаем

$$(n-k)(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) \geq k\left(a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots a_n\right).$$

Последнее неравенство очевидно, поскольку каждое слагаемое в левой части не меньше любого слагаемого в правой, а количество слагаемых в обеих частях одинаковое.

2. Идея доказательства для $m_i \in \boldsymbol{N}$ указана в статье. Пусть $m_i \in \boldsymbol{Q}^+$, т.е. $m_i = \frac{s_i}{t_i}$, где $s_i, t_i \in \boldsymbol{N}$. Положим $T = t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_n$ и рассмотрим неравенство (4) с весами $m_i T \in \boldsymbol{N}$. Имеем

$$\frac{m_1 Tf(x_1) + m_2 Tf(x_2) + \ldots + m_k Tf(x_k)}{m_1 T + m_2 T + \ldots + m_k T} \geq$$
$$\geq f\left(\frac{m_1 T x_1 + m_2 T x_2 + \ldots + m_k T x_k}{m_1 T + m_2 T + \ldots + m_k T}\right),$$

откуда после очевидного сокращения получаем (4) для $m_i \in \boldsymbol{Q}^+$. Неравенство Иенсена для $m_i \in \boldsymbol{R}^+$ получается из (4) для $m_i \in \boldsymbol{Q}^+$ предельным переходом.

3. Введем замену $a = 0{,}5\ln x$, $b = 0{,}5\ln y$, $c = 0{,}5\ln z$ и перепишем неравенство в виде

$$e^{2a+2b-4c} + e^{2a+2c-4b} + e^{2b+2c-4a} \geq e^{a+b-2c} + e^{a+c-2b} + e^{b+c-2a}.$$

Далее решение аналогично рассуждениям задач 1, 2.

4. В силу симметрии будем считать, что $a \geq b \geq c \geq d$. Введем замену $x = \ln a$, $y = \ln b$, $z = \ln c$, $t = \ln d$ и перепишем неравенство в виде

$$e^{4x} + e^{4y} + e^{4z} + e^{4t} + e^{x+y+z+t} + \ldots + e^{x+y+z+t} \geq$$
$$\geq e^{2x+2y} + e^{2x+2z} + e^{2x+2t} + e^{2y+2z} + e^{2y+2t} + e^{2z+2t}.$$

Докажем, что набор

$$(4x, 4y, 4z, 4t, x+y+z+t, \ldots, x+y+z+t)$$

мажорирует

$$(2x+2y, 2x+2z, 2x+2t, 2y+2z, 2y+2t, 2z+2t),$$

откуда и будет следовать решение. Упорядочим оба набора. Ясно, что

$$4x \geq x+y+z+t \geq 4t.$$

Предположим, что

$$4x \geq x+y+z+t \geq 4y$$

(случай $4z \geq x+y+z+t \geq 4t$ рассматривается аналогично). Тогда, очевидно, выполняются следующие неравенства:

$$4x \geq x+y+z+t \geq 4y \geq 4z \geq 4t,$$
$$2x+2y \geq 2x+2z \geq 2x+2t \geq 2y+2z \geq 2y+2t \geq 2z+2t,$$

неравенство $x+t \geq y+z$ следует из $x+y+z+t \geq 4y \Leftrightarrow x+t \geq 3y - z \Leftrightarrow x+t \geq y+z+2(y-z)$ и упорядоченности чисел x, y, z, t. Если же $4y \geq x+y+z+t \geq 4z$, то

$$4x \geq 4y \geq x+y+z+t \geq 4z \geq 4t,$$

второй набор упорядочен одним из двух способов:

$$2x+2y \geq 2x+2z \geq 2y+2z \geq 2y+2t \geq 2z+2t,$$
$$2x+2y \geq 2x+2z \geq 2x+2t \geq 2y+2t \geq 2z+2t.$$

Однако при каждом варианте упорядоченности условия неравенства Караматы, как легко проверить, выполняются.

5. Для доказательства «весового» неравенства Караматы необходимо рассмотреть весовые аналоги лемм 1 и 2. При этом следует применять так называемое весовое раздвижение: одновременное увеличение x_i и уменьшение x_j с сохранением суммы $m_i x_i + m_j x_j$ $(x_i \geq x_j)$.

Конденсаторы в электростатическом поле

1. $F = q\dfrac{q(d_2 - d_1)/(2\varepsilon_0 S) + \mathcal{E}}{d_1 + d_2}$.

2. $E_1 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}\dfrac{l_2}{l_1 + l_2}$, $E_2 = -\dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}\dfrac{l_1}{l_1 + l_2}$. **3.** $E_0 = \sqrt{\dfrac{3A}{\varepsilon_0 S d}}$.

4. $a = \dfrac{\varepsilon_0 S U^2}{m(d-l)^2}$. **5.** $Q = 8\pi\varepsilon_0 R\mathcal{E} - q/3$.

LXIII Московская математическая олимпиада

Математический праздник

6 класс

1. *Ответ*: +1 – 2 + 4 + 8 – 16 – 32 + 64 = 27.

Замечание. Попробуйте сами доказать, что

а) любое число, получающееся таким способом, нечетно;

б) из этой записи можно получить любое нечетное число между числами –128 и 128, причем единственным способом.

2. На рисунке 4 приведены примеры такой закраски.

3. Пусть первая цифра кода x, а вторая y. Тогда само число записывается как $10x + y$, а условие задачи можно записать уравнением

$$(x+y) + xy = 10x + y.$$

Следовательно, $xy = 9x$.

Так как код – двузначное число, то $x \neq 0$, а значит, $y = 9$. При этом x можно взять любым, кроме 0.

Ответ: 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99.