гично). Тогда, очевидно, выполняются следующие неравенства:

$$3x \geq x + y + z \geq 3y \geq 3z,$$

$$2x + y \geq 2x + z \geq 2y + x \geq$$

$$\geq 2z + x \geq 2y + z \geq 2z + y,$$

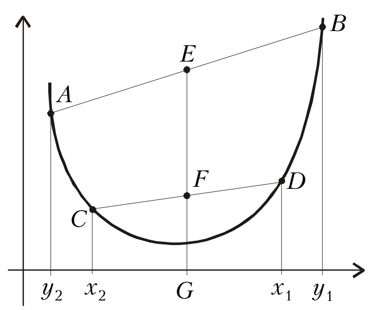
откуда следует справедливость условий (1).

Доказательство неравенства Караматы

Предварительно докажем следующие леммы.

Лемма 1 (про четыре точки). *Если f – выпуклая функция и $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ ($y_1 \geq x_1 \geq x_2 \geq y_2$), то $f(y_1) + f(y_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$.*

Утверждение леммы фактически очевидно (хотя строгое аналитическое доказательство требует некоторой возни). Действительно, отрезок AB находится выше CD, а следовательно, и середина отрезка AB – точка E –



находится выше точки F – середины CD, что и является утверждением леммы, поскольку

$$EG = \left(f(y_1) + f(y_2)\right)/2,$$

$$FG = \left(f(x_1) + f(x_2)\right)/2.$$

Определение. *Раздвиганием набора $(x_1, \ldots, x_n)$ будем называть одновременное увеличение x_i и уменьшение x_j с сохранением их суммы ($x_i \geq x_j$).*

Лемма 1 утверждает, что при раздвигании набора величина $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$ не убывает. Этот факт сам по себе представляет полезный инструмент доказательства неравенств (см., например задачу М1272).[2]

Будем считать исходный набор упорядоченным. Покажем, что всякий полученный из него раздвиганием и упорядочиванием набор мажорирует исходный. Если при раздвигании порядок не нарушается, утверждение очевидно. Рассмотрим пример, когда порядок нарушается.

Пусть есть упорядоченный набор (8, 6, 5, 4). Раздвигание чисел 5 и 4 переводит его в неупорядоченный набор (8, 6, 9, 0). Последующее упорядочивание дает набор (9, 8, 6, 0), который мажорирует исходный. Однако эту процедуру можно заменить цепочкой раздвиганий, сохраняющих порядок:

$$(8,6,5,4) \Rightarrow (8,6,6,3) \Rightarrow$$

$$(8,8,6,1) \Rightarrow (9,8,6,0).$$

На первом этапе раздвигались последние два числа, на втором – второе и четвертое, на третьем – первое и четвертое. С другой стороны, на каждом этапе упорядоченность не менялась и поэтому

$$(9,8,6,0) \succ (8,8,6,1) \succ (8,6,6,3) \succ (8,6,5,4).$$

Оказывается, что и в общем случае всякое раздвигание с последующим упорядочиванием можно заменить цепочкой раздвиганий, сохраняющих порядок (это можно доказать по индукции).

Лемма 2 (Карамата, Харди, Литлвуд, Пойа). *От набора $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ с помощью последовательных раздвиганий можно перейти к набору $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a} \succ \boldsymbol{b}$.*

Доказательство. *Необходимость* условия $\boldsymbol{a} \succ \boldsymbol{b}$ очевидна. Действительно, переходя от $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ к $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, после каждого раздвигания получаем набор, мажорирующий предыдущий, а значит, и исходный набор $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$.

Достаточность. Докажем, что если $\boldsymbol{a} \succ \boldsymbol{b}$, то от набора $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ можно перейти к $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. Доказательство проведем индукцией по числу переменных набора.

1. $n = 1$. Утверждение очевидно.

2. Пусть для любого k, $1 \leq k \leq n-1$, доказано, что при выполнении условия $(a_1, \ldots, a_k) \succ (b_1, \ldots, b_k)$ от набора $(b_1, \ldots, b_k)$ можно с помощью раздвиганий перейти к $(a_1, \ldots, a_k)$. Докажем это утверждение для $k = n$. В наборе $(b_1, \ldots, b_n)$ будем непрерывно раздвигать b_1, b_n (b_1 – максимальное число набора, b_n – минимальное). Тогда правые части всех неравенств системы (1) будут расти, а значит, в некоторый момент какое-то неравенство превратится в равенство

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_l = b_1^* + b_2 + \ldots + b_l,$$

где b_1^* – новое положение переменной b_1.

Учитывая это равенство, сделаем в системе (1) очевидные сокращения:

$$\begin{cases} a_1 \geq b_1^*, \\ a_1 + a_2 \geq b_1^* + b_2, \\ \quad \ldots \\ a_1 + \ldots + a_l = b_1^* + b_2 + \ldots + b_l \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} a_{l+1} \geq b_{l+1}, \\ a_{l+1} + a_{l+2} \geq b_{l+1} + b_{l+2}, \\ \quad \ldots \\ a_{l+1} + \ldots + a_n = b_{l+1} + b_{l+2} + \ldots + b_n^*. \end{cases}$$

По предположению индукции от набора $\boldsymbol{b}' = (b_1^*, \ldots, b_l)$ можно перейти к $\boldsymbol{a}' = (a_1, \ldots, a_l)$ и от $\boldsymbol{b}'' = (b_{l+1}, b_{l+2}, \ldots, b_n^*)$ к $\boldsymbol{a}'' = (a_{l+1}, \ldots, a_n)$ (поскольку $\boldsymbol{a}' \succ \boldsymbol{b}'$ и $\boldsymbol{a}'' \succ \boldsymbol{b}''$), при этом весь набор $(b_1, \ldots, b_n)$ перейдет в $(a_1, \ldots, a_n)$. Лемма доказана.

Теперь неравенство Караматы очевидно. С помощью раздвиганий от набора $(b_1, \ldots, b_n)$ перейдем к $(a_1, \ldots, a_n)$ (лемма 2), при этом на каждом раздвигании сумма $f(x_1) + f(x_2) + \ldots$ $\ldots + f(x_n)$ возрастает (лемма 1).

Упражнения

3 (из задач Соросовских олимпиад). Докажите неравенство

$$\frac{xy}{z^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{zy}{x^2} \geq \sqrt{\frac{xy}{z^2}} + \sqrt{\frac{xz}{y^2}} + \sqrt{\frac{zy}{x^2}},$$

где $x, y, z > 0$.

4 (М506). Пусть a, b, c, d – положительные числа. Докажите, что

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq$$

$$\geq a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2.$$

5. Докажите «весовое» неравенство Караматы

$$m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + \ldots + m_k f(x_k) \geq$$

$$\geq m_1 f(y_1) + m_2 f(y_2) + \ldots + m_k f(y_k)$$

для упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{cases} m_1x_1 \geq m_1y_1, \\ m_1x_1 + m_2x_2 \geq m_1y_1 + m_2y_2, \\ \ldots \\ m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_{n-1}x_{n-1} \geq \\ \geq m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_{n-1}y_{n-1}, \\ m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n = \\ = m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n \end{cases}$$

при $m_i \in \boldsymbol{R}^+$.

---

[2] *В олимпиадном сленге этот прием, за его прямолинейность и универсальность, называют «дубиной».*