справедливо неравенство

$$f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)\ge$$
$$\ge f(b_1)+f(b_2)+\ldots+f(b_n). \quad (2)$$

Это неравенство и называется неравенством Караматы [1].

Связь с другими неравенствами

Отметим, что неравенство Караматы является обобщением неравенства Иенсена. Действительно, положив $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = \overline{a}$, где $\overline{a}$ – среднее арифметическое чисел $a_1, \ldots, a_n$, получаем

$$f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)\ge$$
$$\ge nf\big((a_1+a_2+\ldots+a_n)/n\big). \quad (3)$$

Упражнение 1. Докажите, что для наборов $(a_1,\ldots,a_n)$, $(\overline{a},\ldots,\overline{a})$ выполняются условия (1).

А это значит, что из неравенства Караматы следуют классические неравенства Коши, Коши – Буняковского, Гёльдера, Минковского и т.д.

Правда, в статье О.Ижболдина и Л.Курляндчика для доказательства этих неравенств. применялось «весовое» неравенство Иенсена

$$\frac{m_1f(x_1)+m_2f(x_2)+\ldots+m_kf(x_k)}{m_1+m_2+\ldots+m_k}\ge$$
$$\ge f\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_kx_k}{m_1+m_2+\ldots+m_k}\right),\ m_i>0, \quad (4)$$

а мы получили лишь его частный случай $m_i = 1$. Впрочем, это не так страшно, поскольку из (3) несложно получить (4). В случае $m_i \in \boldsymbol{N}$ необходимо в наборе $a_1, \ldots, a_n$ первые m_1 переменных взять равными x_1, следующие m_2 равными x_2, и т.д. Далее необходимо расширить множество, из которого выбираются числа m_i, до $\boldsymbol{Q}^+$, а потом (если вы знакомы с теорией пределов) и до $\boldsymbol{R}^+$. Кстати, аналогично можно получить и «весовое» неравенство Караматы (см. далее упражнение 5).

Упражнение 2. Докажите неравенство (4) для произвольных действительных чисел $m_i > 0$.

Применение в задачах

Задача 1. *Пусть* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [-\pi/6;\ \pi/6]$. *Докажите, что*

$$\cos(2x_1-x_2)+\cos(2x_2-x_3)+\ldots$$
$$\ldots+\cos(2x_n-x_1)\le\cos x_1+\ldots+\cos x_n.$$

Решение. Поскольку функция $\cos x$ вогнута на отрезке $[-\pi/2;\ \pi/2]$, то достаточно проверить выполнение условий (1) для наборов $(2x_1-x_2,\ldots,2x_n-x_1)$ и $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Упорядочив их, получим наборы

$$\boldsymbol{a}:\ 2x_{m_1}-x_{m_1+1}\ge$$
$$\ge 2x_{m_2}-x_{m_2+1}\ge\ldots\ge 2x_{m_n}-x_{m_n+1} \quad (5)$$

(при этом считаем, что $x_{n+1}=x_1$) и

$$\boldsymbol{b}:\ x_{k_1}\ge x_{k_2}\ge\ldots\ge x_{k_n}. \quad (6)$$

Заметим, что

$$2x_{m_1}-x_{m_1+1}\ge 2x_{k_1}-x_{k_1+1}\ge x_{k_1},$$
$$\left(2x_{m_1}-x_{m_1+1}\right)+\left(2x_{m_2}-x_{m_2+1}\right)\ge$$
$$\ge\left(2x_{k_1}-x_{k_1+1}\right)+\left(2x_{k_2}-x_{k_2+1}\right)\ge$$
$$\ge x_{k_1}+x_{k_2}.$$

Аналогично, сумма *первых* l слагаемых набора $\boldsymbol{a}$ не меньше суммы *любых* l слагаемых этого же набора. В частности, она не меньше, чем $\left(2x_{k_i}-x_{k_i+1}\right)+\ldots+\left(2x_{k_l}-x_{k_l+1}\right)$, а эта сумма не меньше, чем $x_{k_1}+x_{k_2}+\ldots+x_{k_l}$ (убедитесь в этом). Итак, $\boldsymbol{a}\succ\boldsymbol{b}$.

Задача 2. *Пусть* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *– положительные числа. Докажите, что*

$$\frac{a_1^3}{a_2}+\frac{a_2^3}{a_3}+\ldots+\frac{a_n^3}{a_1}\ge a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2.$$

Решение. Выполним замену $x_i=\ln a_i$ и перепишем неравенство в виде

$$e^{3x_1-x_2}+e^{3x_2-x_3}+\ldots+e^{3x_n-x_1}\ge$$
$$\ge e^{2x_1}+e^{2x_2}+\ldots+e^{2x_n}.$$

Далее решение аналогично рассуждениям предыдущей задачи при

$$f(x)=e^x,$$
$$\boldsymbol{a}=\left(3x_1-x_2, 3x_2-x_3,\ldots,3x_n-x_1\right),$$
$$\boldsymbol{b}=\left(2x_1,2x_2,\ldots,2x_n\right).$$

Задача 3 (Турнир городов, 1994 г.). *Пусть* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *– положительные числа. Докажите, что*

$$(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)\le$$
$$\le\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\cdot\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right).$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$\ln\left(a_1^2+a_1\right)+\ldots+\ln\left(a_n^2+a_n\right)\le$$
$$\le\ln\left(a_1^2+a_2\right)+$$
$$+\ln\left(a_2^2+a_3\right)+\ldots+\ln\left(a_n^2+a_1\right).$$

Функция $\ln x$ вогнута, поэтому осталось проверить справедливость условий (1) для наборов $(a_1^2+a_1,\ldots,a_n^2+a_n)$ и $(a_1^2+a_2, a_2^2+a_3,\ldots,a_n^2+a_1)$, что делается аналогично задаче 1. Если упорядочить числа a_i: $a_{k_1}\ge a_{k_2}\ge\ldots\ge a_{k_n}$, то наборы упорядочатся следующим образом:

$$a_{k_1}^2+a_{k_1}\ge a_{k_2}^2+a_{k_2}\ge\ldots\ge a_{k_n}^2+a_{k_n},$$
$$a_{m_1}^2+a_{m_1+1}\ge a_{m_2}^2+a_{m_2+1}\ge\ldots\ge a_{m_n}^2+a_{m_n+1}.$$

И неравенства системы (1), очевидным образом, следуют из $a_{k_1}>a_{k_2}>\ldots>a_{k_n}$. Действительно,

$$\left\{\begin{array}{l} a_{k_1}^2+a_{k_1}\ge a_{m_1}^2+a_{k_1}\ge a_{m_1}^2+a_{m_1+1}, \\ a_{k_1}^2+a_{k_1}+a_{k_2}^2+a_{k_2}\ge a_{m_1}^2+a_{k_1}+a_{m_2}^2+ \\ \quad +a_{k_2}\ge a_{m_1}^2+a_{m_1+1}+a_{m_2}^2+a_{m_2+1}, \\ \ldots \end{array}\right.$$

Отметим, что для решения этой задачи можно было выбрать и другую функцию, а именно $f(x)=\ln\left(1+e^x\right)$ на наборах $\boldsymbol{a}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $\boldsymbol{b}=(2x_1-x_2, 2x_2-x_3,\ldots,2x_n-x_1)$, где $x_i=\ln a_i$.

Задача 4 (Всесоюзная олимпиада, 1975 г.). *Пусть a, b, c – положительные числа. Докажите, что*

$$a^3+b^3+c^3+3abc\ge$$
$$\ge a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b.$$

Решение. В силу симметрии неравенства будем считать, что $a\ge b\ge c$. Подобно задаче 2, введем замену $x=\ln a$, $y=\ln b$, $z=\ln c$ и перепишем неравенство в виде

$$e^{3x}+e^{3y}+e^{3z}+e^{x+y+z}+$$
$$+e^{x+y+z}+e^{x+y+z}\ge$$
$$\ge e^{2x+y}+e^{2x+z}+e^{2y+x}+$$
$$+e^{2y+z}+e^{2z+x}+e^{2z+y}.$$

Докажем, что набор $(3x, 3y, 3z, x+y+z, x+y+z, x+y+z)$ мажорирует $(2x+y, 2x+z, 2y+x, 2y+z, 2z+x, 2z+y)$, откуда и будет следовать решение. Упорядочим оба набора. Ясно, что $3x\ge x+y+z\ge 3z$. Предположим, что $x+y+z\ge 3y$ (случай $3y\ge x+y+z$ рассматривается анало-

[1] *Йован Карамата (1902–1967) – югославский математик, академик. Его основные труды относятся к теории рядов Фурье; он внес также значительный вклад в развитие математической статистики. Утверждение, аналогичное приведенной теореме, было независимо доказано Харди, Литлвудом, Пойа.*