φ к положительному направлению оси абсцисс?

17. Найдите координаты точки, в которую переходит точка $(x; y)$ при симметрии относительно а) точки $(0; 0)$; б) точки $(a; b)$; в) прямой, заданной уравнением $x + y = 1$; г*) прямой, заданной уравнением $y = x \operatorname{tg} \varphi + b$.

18. Гиперболу, заданную уравнением $xy = 1$, повернули на 45° против часовой стрелки. Каково уравнение полученной кривой?

19. Эллипс, заданный уравнением $x^2 + 4y^2 = 4$, повернули на 30° по часовой стрелке. Каково уравнение полученной кривой?

V. Теорема Птолемея

Рассмотрим прямоугольные треугольники OAC и OBC с общей гипотенузой $OC = 1$. Оба они вписаны в окружность с диаметром OC (рис.6).

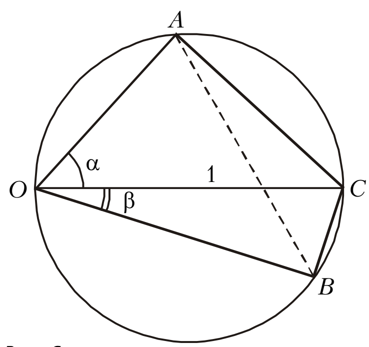

Рис. 6

Напомню, что теорема Птолемея гласит: *произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон.* Значит,

$$OC \cdot AB = OA \cdot BC + OB \cdot AC. \quad (17)$$

Поскольку $OC = 1$, $OA = \cos\alpha$, $OB = \cos\beta$, $CB = \sin\beta$ и $CA = \sin\alpha$, равенство (17) можно записать в виде

$$AB = \cos\alpha \sin\beta + \cos\beta \sin\alpha.$$

По теореме синусов, $AB = 1 \cdot \sin(\alpha + \beta)$ (в самом деле, 1 – это диаметр описанной окружности треугольника OAB, $\alpha + \beta$ – величина угла AOB). Формула (1) оказалась частным случаем теоремы Птолемея! (Разумеется, наше доказательство имеет смысл только для острых углов α и β.)

Между прочим, Птолемей использовал свою теорему именно для вычисления тригонометрических функций одних углов через функции других углов. Поэтому можно сказать, что исторически теорема Птолемея (ок. 90 – ок. 160) предшествовала формулам (1) и (2). В современную форму тригонометрию привел Леонард Эйлер (1707–1783).

Задача Архимеда

Пять из обещанных шести доказательств разобраны. Давайте повременим с шестым способом, чтобы вспомнить одну историю. Когда в 1986 году «Задачник «Кванта» приближался к M1000, был объявлен конкурс на лучшую задачу года. Поступили разные задачи, но ни одна из них не понравилась настолько, чтобы присвоить ей столь «круглый» номер. И тогда было принято решение: объявить победителем конкурса Архимеда из Сиракуз (ок. 287–212 до н.э.).

M1000. *В дугу AB вписана ломаная AMB из двух отрезков ($AM > MB$). Докажите, что основание перпендикуляра KH, опущенного из середины K дуги AB на отрезок AM, делит ломаную пополам: $AH = HM + MB$.*

Геометрическое решение использует неожиданное дополнительное построение (рис.7): на продолжении отрезка AM отложим точку C такую, что $MC = MB$. Угол BMC как внешний угол треугольника AMB равен сумме углов BAM и ABM. В то же время угол

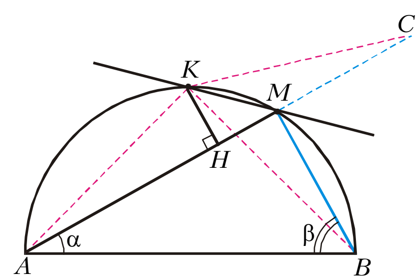

Рис. 7

KMA как вписанный измеряется половиной дуги AK и, следовательно, равен полусумме углов BAM и ABM. Поэтому MK – биссектриса угла BMC. Значит, $MK \perp BC$ и $KC = KB$. Отсюда следует, что $KA = KB = KC$. Поскольку в равнобедренном треугольнике AKC высота KH является заодно и медианой, имеем

$$AH = HC = HM + MB,$$

что и требовалось.

Тригонометрическое решение не требует фантазии: обозначим $\angle BAM = \alpha$ и $\angle ABM = \beta$. Тогда $AM = 2R\sin\beta$ и $BM = 2R\sin\alpha$, где R – радиус описанной окружности треугольника ABM. Поэтому

$$AM + MB = 2R(\sin\alpha + \sin\beta) = $$

$$= 4R \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

С другой стороны, $AK = 2R\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ и $\angle KAM = (\beta - \alpha)/2$. Следовательно,

$$AH = AK \cos\angle KAM = $$

$$= 2R\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = $$

$$= \frac{1}{2}(AM + MB).$$

VI. Умножение комплексных чисел

Следующее доказательство использует не элементарную геометрию, а комплексные числа.

Рассмотрим произведение чисел $\cos\alpha + i\sin\alpha$ и $\cos\beta + i\sin\beta$. С одной стороны,

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot(\cos\beta + i\sin\beta) = $$

$$= \cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + $$

$$+ i\sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \quad (18)$$

С другой стороны, чтобы перемножить числа, заданные в тригонометрической форме, достаточно перемножить их модули и сложить аргументы. Модули чисел $\cos\alpha + i\sin\alpha$ и $\cos\beta + i\sin\beta$ равны 1; аргументы равны α и β соответственно. Значит,

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = $$

$$= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta). \quad (19)$$

Сравните формулы (18) и (19) – опять получите формулы (1) и (2)!

Правильно или нет изложенное доказательство, нет ли в нем порочного круга? Вдруг при определении комплексных чисел были использованы тригонометрические формулы сложения? Смотрим в учебники. Да, в большинстве из них при введении комплексных чисел использованы формулы (1) и (2).

Тем не менее, избежать порочного круга можно. Как это сделать, рассказано в следующем разделе статьи. А здесь напоследок замечу, что доказательство выглядит еще эффектнее, если воспользоваться формулой Эйлера $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Правило умножения чисел, записанных в тригонометрической форме, примет вид свойства показательной функции:

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}. \quad (20)$$

(Разумеется, при этом тоже надо позаботиться об отсутствии порочного круга. Во всяком случае, для экспоненты $e^{i\alpha}$ желательно дать определение, отличное от формулы Эйлера. И что совершенно обязательно – доказывать формулу (20) надо без использования формул (1) и (2). Все это можно сделать, но статья и так уже слишком длинная.)