ны.) Убедить в этом экзаменатора легче, чем в первом доказательстве – но все-таки убеждать надо…

III. Скалярное произведение

Весьма лаконичное доказательство формулы (2) получим, если посчитаем скалярное произведение векторов $\vec{a} = (\cos\alpha; \sin\alpha)$, $\vec{b} = (\cos\beta; -\sin\beta)$.

С одной стороны, оно равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 1\cdot\cos(\alpha+\beta).$$

С другой стороны, известно, что скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Осталось сравнить последние две формулы.

Запутаться, согласитесь, негде. Но один скользкий момент все-таки есть: вся трудность спрятана в формуле, выражающей скалярное произведение векторов через их координаты. Поэтому, прежде чем использовать на экзамене этот способ, надо вспомнить доказательство формулы для скалярного произведения. (И годится не всякое доказательство, а только то, в котором не использованы тригонометрические формулы сложения, – иначе возникнет порочный круг.)

IV. Повороты

Сейчас я изложу способ, к которому придраться труднее всего.

Поворот вокруг точки O на угол φ – это отображение плоскости, при котором всякая точка M переходит в такую точку N, что $OM = ON$ и $\angle MON = \varphi$ (рис. 3). Угол φ откладывают против часовой стрелки, если φ положителен; если же $\varphi < 0$, то откладывают по часовой стрелке угол величиной $-\varphi$. Поворот обычно обозначают R_O^{φ}, по первой букве слова rotation – вращение (сравните: ротор, ротация).

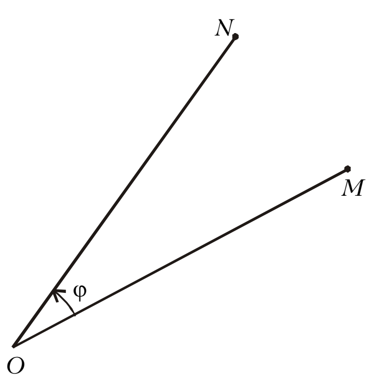

Рис. 3

Рассмотрим повороты R^α и R^β вокруг начала координат на углы α и β. (Поскольку в излагаемом доказательстве использованы повороты только вокруг начала координат, центр поворота мы не указали.) Последовательное выполнение этих двух поворотов дает поворот на угол $\alpha + \beta$:

$$R^\beta \circ R^\alpha = R^{\alpha+\beta}. \qquad (9)$$

Оказывается, если выписать формулы, которые описывают в координатах эти преобразования плоскости, то формула (9) приведет к формулам (1) и (2). Проделаем эти вычисления. При повороте на угол α вокруг начала координат точка (1;0) переходит, как следует из определений косинуса и синуса, в точку с координатами ($\cos\alpha$; $\sin\alpha$) (рис.4). Точка (0;1) при этом повороте переходит в точку ($-\sin\alpha$; $\cos\alpha$).

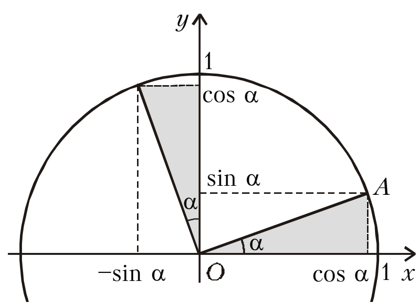

Рис. 4

Далее, вектор $(x;\ y)$ можно разложить в сумму векторов, параллельных осям координат, по формуле

$$(x; y) = x\cdot(1; 0) + y\cdot(0; 1).$$

Поскольку при повороте любой параллелограмм переходит в параллелограмм, легко понять, что для любых чисел x, y и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ верно равенство

$$R^\alpha\left(x\vec{a} + y\vec{b}\right) = xR^\alpha\left(\vec{a}\right) + yR^\alpha\left(\vec{b}\right).$$

Значит, вектор $(x; y)$ при повороте R^α переходит (рис.5) в вектор

$$xR^\alpha(1; 0) + yR^\alpha(0; 1) =$$
$$= x(\cos\alpha; \sin\alpha) + y(-\sin\alpha; \cos\alpha) =$$
$$= (x\cos\alpha - y\sin\alpha; x\sin\alpha + y\cos\alpha).$$

Последняя формула позволяет написать выражения для координат $(x_1; y_1)$ точки, в которую переходит точка $(x; y)$ при повороте на угол α вокруг начала координат:

$$x_1 = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \qquad (10)$$
$$y_1 = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \qquad (11)$$

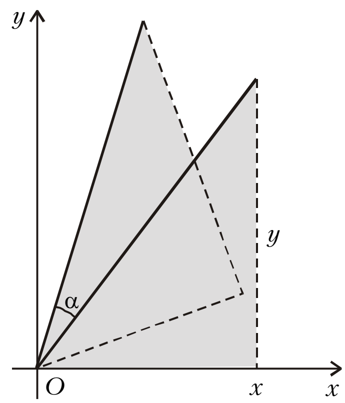

Рис. 5

Для координат $(x_2; y_2)$ точки, в которую переходит точка $(x_1; y_1)$ при повороте R^β, верны аналогичные формулам (10) и (11) формулы

$$x_2 = x_1\cos\beta - y_1\sin\beta, \qquad (12)$$
$$y_2 = x_1\sin\beta + y_1\cos\beta. \qquad (13)$$

Подставив в (12) выражения (10) и (11), получим

$$x_2 = (x\cos\alpha - y\sin\alpha)\cos\beta -$$
$$-(x\sin\alpha + y\cos\alpha)\sin\beta. \quad (14)$$

Раскроем скобки и сгруппируем:

$$x_2 = x\cos\alpha\cos\beta - y\sin\alpha\cos\beta -$$
$$-x\sin\alpha\sin\beta - y\cos\alpha\sin\beta =$$
$$= x(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) -$$
$$-y(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta). \quad (15)$$

Теперь заметим, что

$$x_2 = x\cos(\alpha+\beta) - y\sin(\alpha+\beta), \quad (16)$$

и сравним формулы (15) и (16). В одной формуле коэффициент при x равен $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, в другой формуле (для той же самой координаты x_2) коэффициент при x равен $\cos(\alpha+\beta)$. Получаем формулу (1). Аналогично, сравнивая коэффициенты при y, получаем формулу (2). (Возможно, кому-то сравнение коэффициентов покажется подозрительным приемом. Самый простой, на мой взгляд, способ обосновать его законность – подставить в формулы (15) и (16) сначала $x = 1$, $y = 0$, а затем $x = 0$, $y = 1$.)

Упражнения

14. Для y_2 выведите формулу, аналогичную формуле (14), и убедитесь, что таким образом получаются те же самые формулы (1) и (2).

15. Найдите уравнение окружности, в которую переходит окружность с центром (0;3) и радиусом 2 при повороте вокруг начала координат на а) 90°; б) 45°.

16. В какую точку переходит точка $(x;y)$ при отражении относительно прямой, проходящей через начало координат под углом