Тригонометрические тождества

Л.СЕМЁНОВА

Вся тригонометрия основана на двух формулах:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \qquad (1)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \qquad (2)$$

Скажете, слишком смелое утверждение? В школе учат не две, а два десятка формул, никакой системы не видно, одно спасение – шпаргалка...

Тем не менее, я вскоре расскажу, как из этих двух тождеств можно вывести многие другие. И станет ясно, что ни одну из многочисленных формул тригонометрической шпаргалки не обязательно (даже вредно!) заучивать наизусть. Гораздо полезнее понять основную идею – тогда при необходимости можно быстро вывести нужную формулу.

Когда вы вполне овладеете этой идеей, неизбежно встанет вопрос: как доказывать сами тождества (1)–(2)? Так вот, мы докажем их шестью способами! Наиболее бесхитростен второй способ, который раскрывает геометрический смысл всех выражений, входящих в эти тождества. Остальные способы тоже очень красивы и показывают разнообразные связи тригонометрии: первый – с теоремой синусов, третий – с поворотами, четвертый – со скалярным произведением, пятый – с теоремой Птолемея, шестой – с комплексными числами.

Следствия из двух основных формул

Подставим $-\beta$ вместо β в формулы (1) и (2):

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta, \qquad (3)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \qquad (4)$$

Сложим (1) и (3):

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta. \qquad (5)$$

Сложим (2) и (4) и вычтем (2) из (4):

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta, \qquad (6)$$

$$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta. \qquad (7)$$

Три последние формулы можно использовать для преобразования произведений тригонометрических функций в суммы:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right).$$

Положим теперь

$$x = \alpha+\beta,\ y = \alpha-\beta.$$

Тогда

$$\alpha = \frac{x+y}{2},\ \beta = \frac{x-y}{2},$$

и из формул (5)–(7) получаем формулы для преобразования сумм и разностей тригонометрических функций в произведения:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos y - \cos x = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

Из формул (1) и (2) можно вывести и другие тригонометрические формулы. Например, подставив $\beta = \alpha$, получим

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Легко получить и формулу тангенса суммы:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Заменив β на $-\beta$, получим формулу тангенса разности:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Формулы для тангенса разности и тангенса суммы верны не при любых значениях переменных α и β, а только при тех, для которых $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ существуют (т. е. α, $\beta \ne \frac{\pi}{2} + \pi n$ ни при каком целом n) и знаменатель не обращается в ноль (т. е. в случае тангенса суммы $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta \ne 1$, а в случае тангенса разности $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta \ne -1$). Поэтому при использовании этих формул следует обращать внимание на значения переменных, при которых формулы применять нельзя.

Упражнения

1. Докажите, что

а) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$;

б) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)$.

2. Докажите формулы

а) $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha + 45°)$;

б) $\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha = 2\sin(\alpha + 30°)$.

3. Убедитесь, что если хотя бы одно из чисел a и b отлично от нуля, то

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right) = \sqrt{a^2+b^2}\,(\sin\varphi\cos x + \cos\varphi\sin x) = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\varphi),$$

где φ – такой угол, что $\sin\varphi = a\big/\sqrt{a^2+b^2}$ и $\cos\varphi = b\big/\sqrt{a^2+b^2}$.

(Мы получили так называемую формулу введения дополнительного угла. Если $x = \omega t$, где ω – ненулевая постоянная величина, t – время, то получаем, что сумма двух гармонических колебаний $y = a\cos\omega t$ и $y = b\sin\omega t$ – гармоническое колебание.)

4. Решите уравнения

а) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$;