наибольшее слагаемое равно $1/729$, а слагаемых всего лишь 635.) Следовательно, $b_{1000} < 7$. Это позволяет утверждать, что

$$a_{1000}^2 < 2000 - 1 + 7 < 2025 = 45^2,$$

откуда $a_{1000} < 45$.

в) Использованный при решении пункта б) прием позволяет доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n/n = 0$. Поскольку $a_n = \sqrt{2n-1+b_n}$, получаем ответ:

$$\lim_{n\to\infty} a_n/\sqrt{n} = \sqrt{2}.$$

А.Спивак

М1720. *N одинаковых деревянных кубиков склеены между собой так, что каждые два из них склеены по грани или по участку грани. Докажите, что максимальное значение N равно шести.*

Приведем расположение шести деревянных кубиков, в котором каждые два склеены, как сказано в условии задачи (рис.1): три «черных» кубика стоят на плоскости стола, а три «красных» кубика стоят над ними (вид сверху!). Теперь выстроим цепочку наглядных представлений и соображений, из которых будет следовать, что $\max N = 6$.

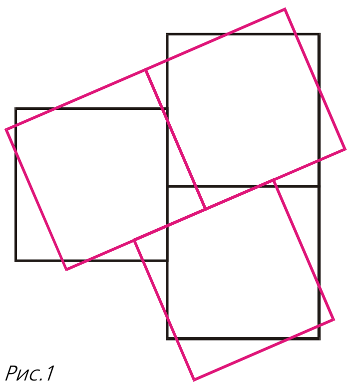


Рис.1

Определимся сначала с плоским случаем: если на столе лежат n одинаковых картонных квадратов, каждые два из которых склеены по стороне или по участку стороны, то $\max n = 3$, что очевидно (рис.2).

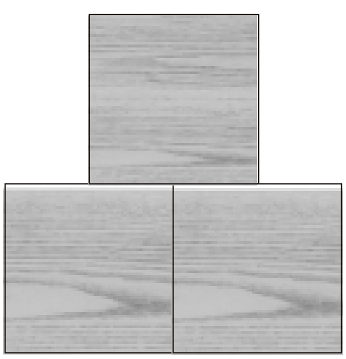


Рис.2

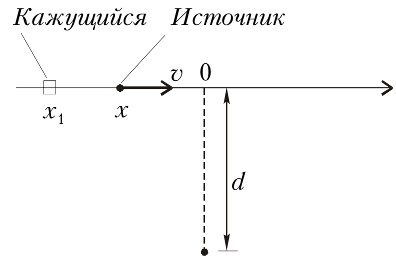
Будем говорить, что n деревянных кубиков (из имеющихся N) принадлежат одному слою, если найдется плоскость (стол), на которой все они стоят. Из вышесказанного следует, что $n \le 3$.

Нетрудно убедиться, что если все N кубиков параллельно расположены, т.е. каждый из них является результатом параллельного переноса другого, то $N \le 4$.

Пусть среди N кубиков нашлись два – кубики Q_1 и Q_2, которые не являются параллельно расположенными (трансляцями), а плоскость π – общая плоскость двух соприкасающихся граней этих кубиков. Плоскость π определяет два слоя, одному из которых принадлежит кубик Q_1, а другому – кубик Q_2. Заметим, что всякий третий деревянный кубик обязан принадлежать одному из этих слоев. Но в каждом слое кубиков не больше трех, значит, $N \le 6$.

В.Произволов

Ф1728. *Источник света движется равномерно вдоль прямой со скоростью $v = 0{,}2\ c$, где c – скорость света. На расстоянии d от этой прямой находится наблюдатель. Запаздывание пришедшего к наблюдателю света приводит к тому, что движение источника кажется ему неравномерным. Каким будет максимальное наблюдаемое ускорение источника света?*



При выбранном начале координат (см. рисунок) и нулевом моменте при прохождении начала координат имеем

$$x = vt, \qquad \frac{x - x_1}{v} = \frac{\sqrt{x_1^2 + d^2}}{c}.$$

Выразим отсюда координату x_1 и вычислим скорость x_1' и ускорение x_1'':

$$x_1 = v\frac{c^2 t - \sqrt{c^2v^2t^2 + d^2\left(c^2 - v^2\right)}}{c^2 - v^2},$$

$$x_1' = \frac{vc^2}{c^2 - v^2}\left(1 - \frac{v^2 t}{\sqrt{c^2v^2t^2 + d^2\left(c^2 - v^2\right)}}\right),$$

$$x_1'' = -\frac{v^3c^2d^2}{\left(c^2v^2t^2 + d^2\left(c^2 - v^2\right)\right)^{3/2}}.$$

Видно, что максимальное *по модулю* ускорение будет при $t = 0$:

$$a_m = \left|x_1''(0)\right| = \frac{v^3c^2d^2}{d^3\left(c^2 - v^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{v^2}{d}\frac{v}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \approx 8{,}5\cdot 10^{-3}\frac{c^2}{d}.$$

Если же говорить о действительно *максимальном* ускорении, то оно равно нулю и получается таким при $t = \pm\infty$ (т.е. задолго до нулевого момента и через очень большое время после него).

В.Шелест

Ф1729. *На гладком горизонтальном столе происходит лобовой удар двух одинаковых тел – одно из них вначале покоится, другое налетает на него со скоростью v_0. Куда и с какой скоростью будет двигаться после удара налетевшее тело, если при ударе в тепло переходит 1% от максимальной энергии деформации тел?*

Максимальная энергия деформации получается в тот момент, когда в процессе соударения скорости тел равны, т.е. эта энергия равна половине начальной кинетической энергии E_0 налетающего тела, а тепловые потери составляют $E_0/200$. Для скоростей тел после удара, в соответствии с законом сохранения импульса и выражением для кинетической энергии (с учетом потерь), можно записать

$$u_1 + u_2 = v_0, \quad u_1^2 + u_2^2 = 0{,}995\,v_0^2.$$