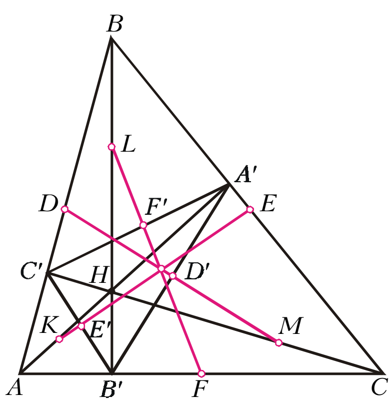
а) прямые DD', EE', FF' имеют общую точку, причем эта точка, точка пересечения прямых AA', BB', CC' и точка пересечения медиан треугольника ABC лежат на одной прямой;
б) если в качестве прямых AA', BB', CC' взяты высоты треугольника ABC, то точка пересечения прямых DD', EE', FF' совпадает с центром окружности Эйлера (окружности девяти точек) треугольника ABC;
в) если прямые AA', BB', CC' – биссектрисы треугольника ABC, то их общая точка, общая точка прямых DD', EE', FF' и точка пересечения прямых, проходящих через вершины треугольника ABC и делящих его периметр пополам (точка Нагеля), лежат на одной прямой;
г) если прямые AA', BB', CC' делят периметр треугольника ABC пополам, то точка пересечения прямых DD', EE', FF' совпадает с центром масс контура треугольника ABC.

а) Точку пересечения прямых AA', BB', CC' обозначим H, середины отрезков AH, BH, CH – соответственно K, L, M (см. рисунок).
Воспользуемся теоремой Гаусса: если у четырехугольника нет параллельных сторон, то середины его диагоналей и середина отрезка, соединяющего точки пересечения противоположных сторон четырехугольника, лежат на одной прямой. (Докажите ее самостоятельно!)



Применяя эту теорему к четырехугольнику $A'HB'C$, приходим к выводу, что точки D, D', M лежат на одной прямой.
Точно так же на одной прямой лежат точки E, E', K и F, F', L.
Но отрезки DM, EK, FL соединяют, соответственно, середины противолежащих сторон и середины диагоналей четырехугольника $ABCH$, поэтому эти отрезки имеют общую точку, совпадающую с центром системы четырех равных точечных масс, три из которых находятся в вершинах треугольника ABC, а четвертая – в точке H (теорема Симсона–Жергона).
Так как центр масс системы A, B, C находится в точке пересечения медиан треугольника ABC, то центр масс системы A, B, C, H лежит на отрезке, соединяющем точку пересечения медиан треугольника ABC с точкой H, и делит этот отрезок в отношении 3:1 (считая от точки H).
б) Если H – точка пересечения высот треугольника ABC, то около четырехугольника $ABA'B'$ можно описать окружность с центром в точке D, поэтому треугольник $A'DB'$ – равнобедренный, а так как D' – середина отрезка $A'B'$, то $DD' \perp A'B'$.
Аналогично, $EE' \perp B'C'$ и $FF' \perp A'C'$, т.е. точка пересечения прямых DD', EE', FF' – это центр окружности, описанной около треугольника $A'B'C'$, а эта окружность и есть окружность Эйлера треугольника ABC.
в) Воспользуемся известной теоремой: центр окружности, вписанной в треугольник, совпадает с точкой Нагеля треугольника, вершинами которого служат середины сторон исходного треугольника.
Следовательно, если H – центр вписанной в треугольник ABC окружности, то H – точка Нагеля треугольника DEF. Но треугольник DEF гомотетичен треугольнику ABC с центром гомотетии в точке пересечения медиан обоих треугольников и коэффициентом гомотетии $-1/2$, поэтому точки Нагеля обоих треугольников и точка пересечения их медиан лежат на одной прямой.
Ранее было доказано, что отрезок, соединяющий точку H с точкой пересечения медиан треугольника ABC, делится точкой пересечения прямых DD', EE', FF' в отношении 3:1 (считая от точки H), так что эта же точка делит отрезок, соединяющий точку H с точкой Нагеля треугольника ABC, в отношении 1:3 (тоже считая от точки H).
Можно показать, что эта же точка делит пополам отрезок, соединяющий центр вписанной в треугольник ABC окружности с центром масс контура треугольника ABC.
г) Центр масс контура треугольника совпадает с точкой пересечения биссектрис треугольника, вершинами которого служат середины сторон исходного треугольника (см., задачу М1016).
Из этого и указанных выше соотношений следует нужное доказательство.
Ясно также, что центр масс контура треугольника делит пополам отрезок, соединяющий точку пересечения биссектрис треугольника и точку Нагеля.

И.Вайнштейн

М1714. *Докажите, что каждое из уравнений*
а) $(x^2+1)(y^2-1)=z^2$,
б) $(x^2-1)(y^2-1)=z^2$, *где* $x \neq y$,
в)* $(x^2+1)(y^2+1)=z^2$, *где* $x \neq y$,
имеет бесконечно много решений в натуральных числах x, y и z.

а) Домножим обе части очевидного тождества

$$(2u+1)^2-1=4u(u+1) \qquad (1)$$

на $u+1$; кроме этого, считая $u>0$, положим $t=\sqrt{u}$. Подставив $u=t^2$, получим

$$(t^2+1)\left((2t^2+1)^2-1\right)=\left(2t(t^2+1)\right)^2. \qquad (2)$$

А теперь возьмем в качестве t любое целое положительное число, положим

$$x=t,\ y=2t^2+1,\ \ z=2t(t^2+1) \qquad (3)$$

– и задача а) решена.
Аналогично решается и задача б): рассмотрев тождество (1) при $u<0$ и полагая $t=\sqrt{-u}$, мы, рассуждая как и выше, придем к тождеству

$$(t^2-1)\left((2t^2-1)^2-1\right)=\left(2t(t^2-1)\right)^2. \qquad (4)$$

Решая а) и б), можно было вместо (1) воспользоваться тригонометрией – например, так:

$$1-\cos^2 2x=1-\left(2\cos^2-1\right)^2=4\cos^2 x\left(1-\cos^2 x\right),$$

$$\left(1-\cos^2 x\right)\left(1-\cos^2 2x\right)=4\cos^2 x\left(1-\cos^2 x\right)^2.$$

Подставив $\cos 2x=2\cos^2 x-1$, получаем (4) при $u = -t^2 \le 1$. Значит, (4) верно при всех u: многочлены,