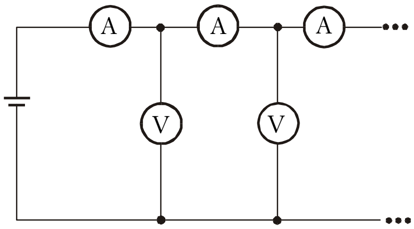

Рис.2

Ф1746. К батарейке напряжением $U = 1{,}5$ В подключена очень длинная цепь из множества одинаковых амперметров и такого же количества одинаковых вольтметров (рис.2). Каждый из амперметров имеет сопротивление $r = 1$ Ом, сопротивление каждого вольтметра $R = 10$ кОм. Что показывают первый и второй амперметры? Найдите сумму показаний всех амперметров и сумму показаний всех вольтметров в этой цепи.

А.Приборов

Ф1747. Катушка индуктивности подключена параллельно конденсатору, и они присоединены к источнику переменного напряжения. Измеренный в цепи источника ток равен $I_1 = 1$ А, ток через конденсатор при этом составляет $I_2 = 0{,}8$ А. Во сколько раз нужно изменить частоту источника, чтобы наступил резонанс?

З.Катушкин

Решения задач М1711—М1720, Ф1728—Ф1732

М1711. *В «Большой энциклопедии кроликов» 10 томов. Они стоят на полке почти по порядку: каждый том стоит либо на своем месте, либо на соседнем. Сколько таких расположений возможно?*

Будем считать, что в энциклопедии n томов и все вместе они занимают n положенных им мест на полке, хотя при этом некоторые тома могут занимать не свое место, а соседнее со своим. В общее количество таких расположений войдет и то расположение, в котором все тома стоят на своих местах (его мы потом вычтем).

Пусть $P(n)$ – количество таких расположений n томов; $P(1) = 1$, $P(2) = 2$. Разобьем все их на две группы; в первую группу отнесем те, в которых первый том стоит на своем месте, во вторую группу – остальные.

В первой группе столько расположений, сколько их возможно из $(n-1)$ тома (со второго до n-го), т.е. $P(n-1)$. Если первый том не на своем месте, то он стоит на второй позиции, а на первой позиции стоит второй том. Таких расположений столько же, сколько расположений остальных томов: со второго до n-го, т.е. всего $P(n-2)$.

Значит, имеет место соотношение $P(n) = P(n-1) + P(n-2)$. Используя его, можно, зная $P(1)$ и $P(2)$, найти $P(3)$, затем найти $P(4)$, и так далее. Получаем последовательность: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89. Итак, $P(10) = 89$.

Такая последовательность чисел $P(n)$ – это числа Фибоначчи.

Если есть желание вычесть то расположение, в котором все тома стоят на своих местах, то ответом для $n = 10$ будет 88.

Д.Калинин

М1712. *а) Несколько треугольников расположены на плоскости так, что каждые четыре из них имеют общую вершину. Докажите, что все треугольники имеют общую вершину.*

б) Несколько прямоугольников расположены на плоскости так, что каждые три из них имеют общую вершину. Докажите, что все прямоугольники имеют общую вершину.

а) На плоскости расположены треугольники T_1, T_2, ..., T_n $(n \geq 5)$, каждые четыре из которых имеют общую вершину. Сначала положим $n = 5$. Из треугольников T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 можно составить четыре четверки, содержащие треугольник T_1. Каждая такая четверка треугольников имеет общую вершину, и эта точка является вершиной треугольника T_1. Но у T_1 лишь три вершины, и значит, есть такая его вершина, которая является общей для двух из четырех четверок. Очевидно, что эта изобранная вершина треугольника T_1 является вершиной всех пяти треугольников.

Подобные рассуждения первого шага индукции проходят без изменений и для индуктивного перехода от n к $n + 1$.

В то же время нужно заметить, что в утверждении пункта а) слова «каждые четыре» нельзя заменить на «каждые три». В самом деле, четыре вершины квадрата являются вершинами четырех треугольников, каждые три из которых имеют общую вершину, но все четыре общей вершины не имеют.

б) Предварительно сделаем два элементарных геометрических замечания. Первое: четыре различные точки на плоскости, из которых каждые три являются вершинами прямоугольного треугольника, все вместе являются вершинами прямоугольника. Второе: два прямоугольника, имеющих три общие вершины, совпадают.

Теперь рассмотрим расположение прямоугольников P_1, P_2, ..., P_n $(n \geq 4)$, каждые три из которых имеют общую вершину. Сначала положим $n = 4$. Допустим, что прямоугольники P_1, P_2, P_3 и P_4 не имеют общей вершины, хотя каждые три из них общую вершину имеют: точки A, B, C и D являются общими вершинами для всевозможных троек наших прямоугольников. Тогда всякие три из этих точек являются вершинами одного из прямоугольников и, в силу предварительных замечаний, $ABCD$ – это прямоугольник, который совпадает с каждым из четырех прямоугольников P_1, P_2, P_3 и P_4. Налицо противоречие с допущением.

Разберем случай при $n = 5$: допустим, что прямоугольники P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 не имеют общей вершины, хотя каждые три из них общую вершину имеют. Но тогда, в силу доказанного, каждые четыре из них имеют общую вершину. В этом случае точки A, B, C, D и E являются общими вершинами для всевозможных четверок прямоугольников. При этом каждые четыре из этих точек являются вершинами одного прямоугольника. Но таких пяти различных точек на плоскости существовать не может, значит, две из этих точек совпадают. Тогда эти совпавшие точки являются общей вершиной для всех пяти прямоугольников – противоречие. Индуктивный переход от n к $n + 1$ реализуется так же, как переход от 4 к 5.

В.Произволов

М1713. *На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты такие точки A', B', C', что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.*

Пусть D, E, F, D', E', F' – середины отрезков AB, BC, CA, $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$.

Докажите, что