Удивителен диапазон методов подачи материала – от шуточных стишков

Нужно только постараться
И запомнить все как есть:
Три, четырнадцать, пятнадцать,
Девяносто два и шесть

и

Это я знаю и помню прекрасно,
Пи многие знаки мне лишни, напрасны,

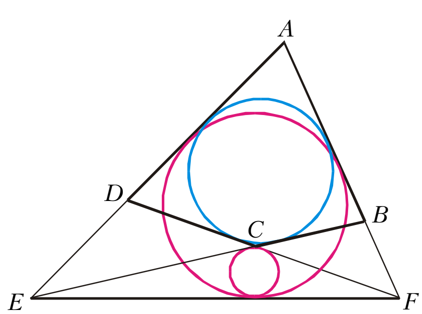
позволяющих по количеств букв в словах запомнить первые цифры числа $\pi \approx 3{,}141592653589$, до строгих определений комплексных чисел, инверсии и т.п.

Интересны многочисленные короткие рассказы об отдельных исторических фактах, теоремах и формулах. Приведу один из них, посвященный задачам из японских храмов.

«С XVII по XIX в., в период правления сёгунов, Япония была полностью изолирована от внешнего мира. Чтобы обмениваться открытиями, японские геометры делали красочные чертежи на деревянных дощечках и отдавали их в пагоды. Там их подвешивали под крышами. Немало дощечек с задачами – их называют сан гаку – сохранилось до наших дней. Задачи с решениями дошли до нас и в рукописных списках.

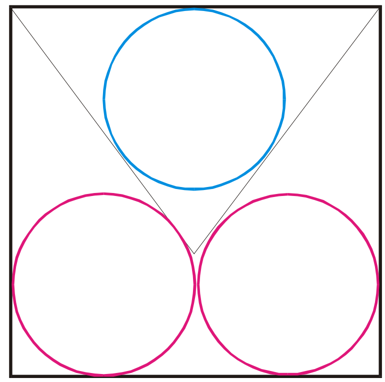
В большинстве сан гаку рассматриваются весьма прихотливые и изящные конструкции с окружностями, вписанными в квадраты, треугольники и более сложные фигуры; есть и такие, где представлены эллипсы и сферы. Вот несколько примеров.

Задача 1. Если в четырехугольник ABCD можно вписать окружность,



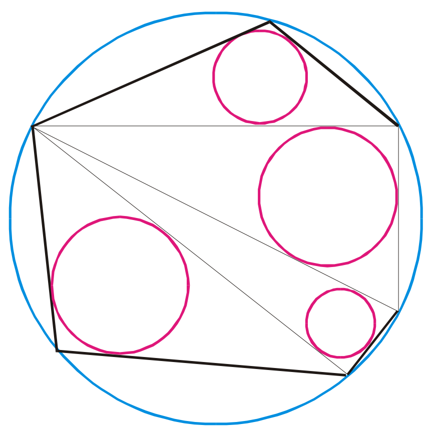
то окружности, вписанные в треугольники AEF и CEF, касаются отрезка EF в одной и той же точке.

Задача 2. Если вписанные в квадрат красные окружности равны между собой, то и синяя окружность равна им.



Особенно сильное впечатление производит следующая теорема, «обнародованная» в пагоде в 1800 г.

Задача 3. Проведем из вершины многоугольника, вписанного в окружность, все диагонали и впишем окружности в образовавшиеся треугольники. Тогда сумма радиусов этих окружностей будет одной и той же



независимо от выбора исходной вершины.

Все три утверждения доказываются с помощью теоремы о касательных, причем в первых двух задачах ее одной и достаточно.

При решении третьей задачи удобнее доказывать сразу более сильное свойство: сумма радиусов рассматриваемых окружностей остается постоянной для любого разбиения многоугольника на треугольники непересекающимися диагоналями. При доказательстве используется следующая теорема Карно:

Сумма радиусов вписанной и описанной окружностей треугольника равна алгебраической сумме расстояний от центра описанной окружности до его сторон, причем расстояние до стороны берется со знаком плюс, если центр лежит по ту же сторону от этой стороны, что и сам треугольник, и со знаком минус, если по другую сторону.»

Закончу рассказ об этой замечательной энциклопедии двумя шутками из нее.

1. Если равны половины, то равны и целые. Полупустой стакан равен полуполному; следовательно, пустой стакан равен полному.

2. Рассмотрим равенство $1 = \frac{2}{3-1}$. Если единицу в знаменателе заменить на $\frac{2}{3-1}$, то получим

$$1 = \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3-1}}.$$

Повторив эту операцию по отношению к новой единице, стоящей в знаменателе, и поступая далее подобным образом, мы построим бесконечную цепную дробь

$$1 = \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \ldots}}}}.$$

С другой стороны,

$$2 = \frac{2}{3-2} =$$

$$= \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3-2}} = \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \ldots}}}}.$$

Построенные дроби равны! Значит, равны и числа, из которых они получены, т.е. $1 = 2$. Сильный и очень важный результат!

* * *

В.Спиров