Продемонстрируем силу неравенства Иенсена на конкретном примере. А именно, докажем знаменитое неравенство Коши — Буняковского

$$\left(a_1^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+\ldots+b_n^2\right)\ge$$
$$\ge\left(a_1b_1+\ldots+a_nb_n\right)^2,$$

где $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ – произвольные положительные числа.

Доказательство. Как мы знаем, функция $y=x^2$ – выпуклая. Напишем для этой функции неравенство Иенсена (3):

$$\left(\frac{m_1x_1+\ldots+m_nx_n}{m_1+\ldots+m_n}\right)^2\le$$
$$\le\frac{m_1x_1^2+\ldots+m_nx_n^2}{m_1+\ldots+m_n}\quad(m_i>0).$$

Следовательно,

$$\left(m_1x_1^2+\ldots+m_nx_n^2\right)\left(m_1+\ldots+m_n\right)\ge$$
$$\ge\left(m_1x_1+\ldots+m_nx_n\right)^2.$$

Положив $m_i=b_i^2,\ x_i=\frac{a_i}{b_i}$, получим требуемое неравенство.

Упражнение 3. Докажите неравенство Коши — Буняковского для произвольных вещественных чисел $a_i,\ b_i$.

Примеры выпуклых функций

Для успешного применения неравенства Иенсена необходим простой критерий, позволяющий определять, является ли данная функция выпуклой.

Теорема. *Пусть $y=f(x)$ – дважды дифференцируемая функция. Если ее вторая производная положительна, то функция выпукла, а если вторая производная отрицательная, то функция вогнута.*

Мы не будем аккуратно доказывать эту теорему, поясним только ее геометрический смысл. Пусть $f''(x)>0$ для всех x. Очевидно, что надграфик окажется выпуклым, если график функции в каждой точке «поворачивает» вверх относительно касательной в этой точке. На языке формул это означает, что если $l(x)$ – линейная функция, график которой – касательная к графику функции $f(x)$ в точке $(a,f(a))$, то $f(x)>l(x)$ при всех x, достаточно близких к a и отличных от a.

Чтобы вывести неравенство $f(x)>l(x)$ из неравенства $f''(a)>0$, рассмотрим следующую ситуацию. Пусть $g(x)$ – такая функция, что $g(a)=g'(a)=0$ и $g''(a)>0$. Тогда при всех x, достаточно близких к a и отличных от a, $g(x)>0$. Это понятно с физической точки зрения: если покоящемуся телу (скорость $g'(a)=0$) придать положительное ускорение (ускорение $g''(a)>0$), то тело начнет перемещаться в положительном направлении.

Рассмотрим теперь функцию $g(x)=f(x)-l(x)$. Поскольку графики функции $f(x)$ и $l(x)$ проходят через одну точку и имеют в ней одинаковый наклон, $g(a)=g'(a)=0$. Кроме того, $g''(x)=f''(x)$, так как вторая производная линейной функции $l(x)$ равна нулю. Значит, $g''(a)>0$ и, согласно сказанному в предыдущем абзаце, $g(x)>0$ при x, достаточно близких к a. Это и значит, что $f(x)>l(x)$. Случай $f''(x)<0$ рассматривается аналогично.

Пользуясь теоремой, мы «запасемся» несколькими выпуклыми и вогнутыми функциями. От вас при этом требуется умение вычислять производные.

Примеры

1. $y=x^\alpha\ (x>0)$.

Так как $y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, то при $0<\alpha<1$ функция вогнутая, а при $\alpha<0$ и $\alpha>1$ – выпуклая.

2. $y=a^x\ (a>0,\ a\ne1)$.

Так как $y''=a^x\ln^2a>0$, то функция выпуклая.

3. $y=\log_a x\ (x>0,\ a>0,\ a\ne1)$.

Так как $y''=-\frac{1}{x^2\ln a}$, то при $a<1$ функция выпуклая, а при $a>1$ – вогнутая.

4. $y=\ln\left(1+e^x\right)$.

Так как $y''=\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}>0$, то эта функция выпуклая.

5. $y=x\ln x$.

Так как $y''=\frac{1}{x}>0$, то функция выпуклая.

6. $y=\left(1+x^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\ (x>0)$.

Так как $y''=(\alpha-1)x^{\alpha-2}\left(1+x^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}-2}$, то при $\alpha<1$ функция вогнутая, а при $\alpha>1$ – выпуклая.

Теперь мы можем доказать несколько классических неравенств.

Неравенство Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}\quad(x_i>0).$$

Доказательство. Прологарифмируем обе части этого неравенства:

$$\ln\left(\frac{1}{n}x_1+\ldots+\frac{1}{n}x_n\right)\ge$$
$$\ge\frac{1}{n}\ln x_1+\ldots+\frac{1}{n}\ln x_n.$$

Полученное неравенство напоминает нам неравенство Иенсена, однако знак неравенства «смотрит не туда». Объясняется это тем, что функция $\ln x$ не выпуклая, а вогнутая (пример 3).

Неравенство Гёльдера

Пусть $p,\ q$ – положительные числа, причем $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\le\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$(a_i,b_i>0).$$

Доказательство. Ясно, что $p>1$, поэтому функция $y=x^p$ – выпуклая (пример 1). Напишем для этой функции неравенство Иенсена (3):

$$\left(\frac{\Sigma m_ix_i}{\Sigma m_i}\right)^p\le\frac{\Sigma m_ix_i^p}{\Sigma m_i}.$$

Отсюда

$$\Sigma m_ix_i\le\left(\Sigma m_i\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\Sigma m_ix_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Так как $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то $\frac{p-1}{p}=\frac{1}{q}$, и поэтому

$$\Sigma m_ix_i\le\left(\Sigma m_ix_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\Sigma m_i\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Положив теперь $m_i=b_i^q,\ x_i=a_ib_i^{1-q}$, получаем требуемое неравенство.

Неравенство Минковского

$$\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}+\sqrt[n]{b_1\cdot\ldots\cdot b_n}\le$$
$$\le\sqrt[n]{\left(a_1+b_1\right)\cdot\ldots\cdot\left(a_n+b_n\right)}$$
$$(a_i,b_i>0).$$

Доказательство. Поделив обе части неравенства на $\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}$,