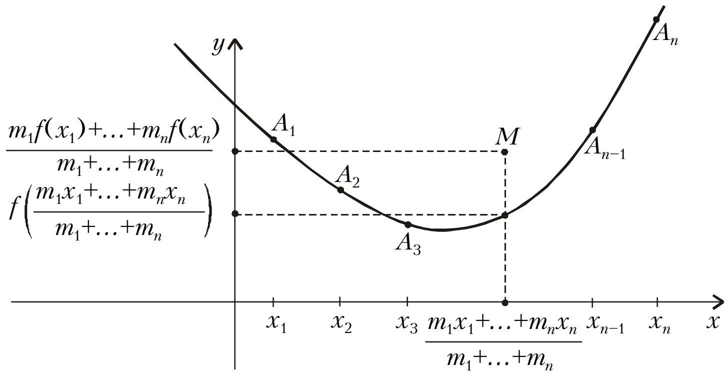

Рис.3

Центр масс этих точек имеет координаты

$$\left(\frac{m_1x_1+\ldots+m_nx_n}{m_1+\ldots+m_n};\ \frac{m_1f(x_1)+\ldots+m_nf(x_n)}{m_1+\ldots+m_n}\right).$$

Так как точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ принадлежат надграфику выпуклой функции, то и их центр масс также принадлежит надграфику (ибо надграфик – выпуклая фигура). А это означает, что ордината центра масс M не меньше ординаты точки на графике с той же абсциссой (рис.3), т.е.

$$f\left(\frac{m_1x_1+\ldots+m_nx_n}{m_1+\ldots+m_n}\right)\le \frac{m_1f(x_1)+\ldots+m_nf(x_n)}{m_1+\ldots+m_n}. \quad (3)$$

Для завершения доказательства остается положить $m_1=\alpha_1, \ldots, m_n=\alpha_n$.

Этот пункт статьи мы хотим закончить двумя важными замечаниями. Во-первых, в процессе доказательства неравенства Иенсена (2) мы доказали неравенство (3). На самом деле эти неравенства равносильны. Положив в неравенстве (2) $\alpha_i=\frac{m_1}{m_1+\ldots+m_n}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, мы получаем неравенство (3). Поэтому естественно оба эти неравенства называть неравенствами Иенсена. Неравенство (2) выглядит более компактно, однако для приложений удобнее пользоваться неравенством (3). Во-вторых, если функция $f(x)$ вогнутая, то для нее неравенства Иенсена (2) и (3) меняются на противоположные. Чтобы доказать это, достаточно рассмотреть выпуклую функцию $-f(x)$.

Неравенство Коши—Буняковского

На первый взгляд, неравенство Иенсена не производит особого впечатления: слишком общо выглядит формулировка. Прочитав статью до конца, вы убедитесь, что это впечатление обманчиво.

Иллюстрация М.Сумниной