Неравенство Иенсена

О.ИЖБОЛДИН, Л.КУРЛЯНДЧИК

Искусством доказывать неравенства овладеть далеко не просто. Тут требуется большой опыт, интуиция, и, как в каждом искусстве, умение свободно применять различные «технические» приемы. Мы продемонстрируем один из таких приемов на ряде примеров. В этой статье будут доказаны и классические неравенства (Коши, Коши – Буняковского, Гёльдера и Минковского), и менее знаменитые, но также весьма интересные.

Мы будем записывать формулы, как правило, коротко, с помощью обозначений

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Советуем тем, кто еще не научился ими пользоваться, расписывать выкладки более подробно.

Выпуклые множества

В основе доказательств неравенств, о которых будет идти речь, лежит понятие выпуклости. Это очень важное математическое понятие, и вы с ним уже встречались в школьном курсе геометрии при изучении многоугольников. Однако в математике понятие выпуклости связано не только с многоугольниками. Фигуру называют выпуклой, если с любыми двумя своими точками она содержит весь отрезок с концами в этих точках. На рисунке 1 показаны примеры выпуклых и невыпуклых фигур. Выпуклые фигуры обладают многими замечательными свойствами, но нас будет интересовать лишь одно из них. Сформулируем его:

Пусть в точках A_1, A_2, …, A_n выпуклой фигуры Ф сосредоточены массы m_1, m_2, …, m_n соответственно. Тогда центр масс этих точек также принадлежит фигуре Ф.

Из физики известно, что центр масс плоской фигуры – это точка с координатами

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \right), \qquad (1)$$

где x_i, y_i – координаты точки A_i.

Упражнения

1. Докажите, что центр масс двух точек лежит на отрезке, их соединяющем.

2. Докажите, что центр масс n точек лежит на отрезке, соединяющем любую из них с центром масс остальных.

Выпуклые функции

Нарисуем график функции $y = x^2$ (рис.2,*а*).

Мы видим, что надграфик этой функции (на рисунке он закрашен красным цветом) является выпуклой фигурой. Если же рассмотреть функцию $y = \sin x$ $(x \in [0; \pi])$, то ее надграфик (на рисунке 2,*б* он закрашен красным цветом) выпуклым не является. Однако выпуклым является подграфик этой функции (на том же рисунке он закрашен синим цветом).

Эти наблюдения приводят к важному определению:

Если надграфик функции является выпуклой фигурой, то говорят, что эта функция выпуклая, а если выпуклым является подграфик, то говорят, что функция вогнутая [1].

Тем самым, функция $y = x^2$ является выпуклой, а функция $y = \sin x$ $(x \in [0; \pi])$ – вогнутой.

Основное неравенство

Среди известных классических неравенств особое место занимает неравенство Иенсена [2]. Все классические неравенства, упомянутые в начале статьи, являются его следствием.

Теорема (неравенство Иенсена). *Пусть $y = f(x)$ – функция, выпуклая на некотором интервале, x_1, x_2, …, x_n – произвольные числа из этого интервала, а α_1, α_2, …, α_n – произвольные положительные числа, сумма которых равна единице. Тогда*

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \le$$
$$\le \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n). \quad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим на графике функции $y = f(x)$ точки A_1, A_2, …, A_n с абсциссами x_1, x_2, … …, x_n. Расположим в этих точках грузы с массами m_1, m_2, …, m_n.

Опубликовано в «Кванте» №4 за 1990 год.

[1] *В некоторых учебниках принята другая терминология.*

[2] *Иенсен Иоганн Людвиг (1859 – 1925) – датский математик.*

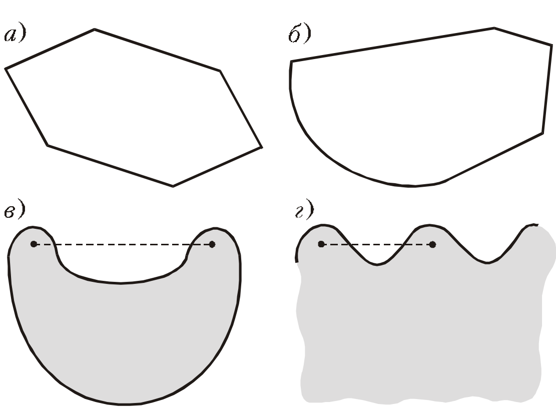

Рис.1

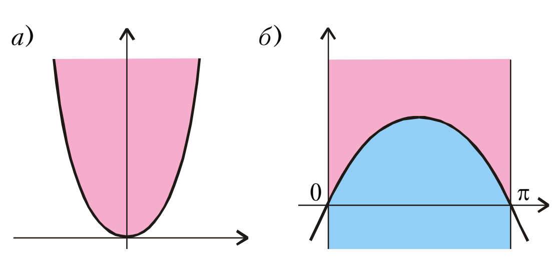

Рис.2