Поляры и теорема Паппа

Г.БАГДАСАРЯН

От редакции. *Студент Ереванского университета Григорий Багдасарян, призер международных математических олимпиад 1996 и 1997 годов, самостоятельно придумал любопытное геометрическое преобразование. Он не успел узнать, что оно известно науке под названием полярного преобразования, – погиб в озере Севан, спасая тонувшего брата.*

Для удобства читателей оригинальная терминология автора приведена в соответствие с общепринятой.

Для решения многих задач полезны параллельные переносы, повороты, осевые симметрии и другие геометрические преобразования. Они переводят точки в точки. Но иногда оказывается полезным преобразование, переводящее точки в прямые, а прямые – в точки.

Чтобы перейти к точным формулировкам, зафиксируем на плоскости окружность ω с центром O и радиусом r. *Полярой* точки A, где $A \neq O$, назовем прямую, перпендикулярную прямой AO и проходящую на расстоянии r^2/OA от точки O.

Полярой прямой l, не проходящей через точку O, будем называть такую точку A, полярой которой является прямая l. (Другими словами, $OA \perp l$ и $OA = r^2/d$, где d – расстояние от точки O до прямой l.)

Например, полярой точки, лежащей на окружности ω, является проходящая через эту точку касательная.[1]

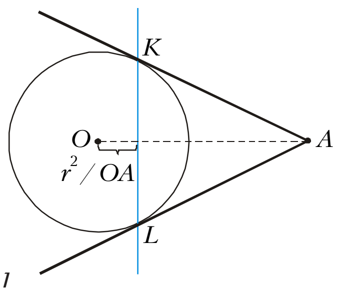

Рис. 1

[1] *Для доказательства достаточно заметить, что $r^2/r = r$ и касательная перпендикулярна радиусу.*

Столь же легко убедиться, что если $OA < r$, т.е. $r^2/OA > r$, то поляра точки, лежащей внутри окружности ω, не пересекает ω.

Если $OA > r$, то поляра точки A пересекает окружность ω в некоторых двух точках K и L (рис. 1). Оказывается, прямые AK и AL – касательные к окружности! Это легко доказать непосредственно, но мы выведем это утверждение из еще более важного свойства полярного преобразования:

если точка B лежит на поляре точки A, то и точка A лежит на поляре точки B.

Действительно, по определению, поляра точки A перпендикулярна лучу OA и проходит через такую точку A' этого луча, что $OA' = r^2/OA$ (рис.2).

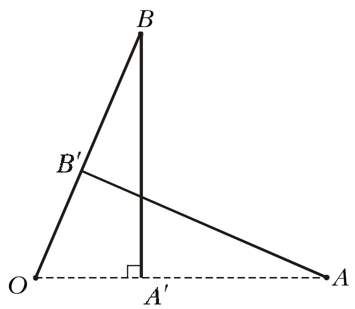

Рис. 2

Рассмотрим такую точку B' луча OB, для которой $OB' = r^2/OB$. Соединим B' и A отрезком.

Поскольку

$$\frac{OB'}{OA'} = \frac{r^2/OB}{r^2/OA} = \frac{OA}{OB}$$

и поскольку угол O треугольников $OB'A$ и $OA'B$ общий, то эти два треугольника подобны. Соответственные углы подобных треугольников равны:

$$\angle OA'B = \angle OB'A = 90°,$$

что и требовалось.

Как вы помните, мы обещали доказать, что прямые AK и AL (см. рис. 1) касаются окружности ω. Это теперь легко сделать: поскольку точка K лежит на поляре точки A, то точка A лежит на поляре точки K, а эта поляра как раз и является касательной к окружности.[2]

Теорема Паппа

Рассмотрим вписанный в окружность шестиугольник $AB_1CA_1BC_1$ (рис.3). Пусть продолжения его противоположных сторон AB_1 и A_1B пересекаются в точке M, продолжения сторон AC_1 и A_1C – в точке L, а продолжения BC_1 и B_1C – в точке K. Известная

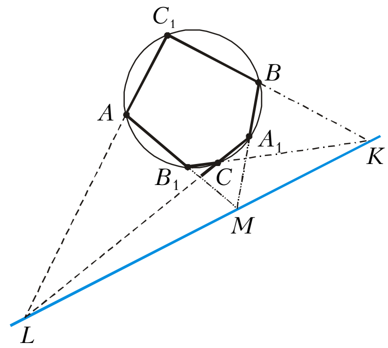

Рис. 3

теорема Паскаля гласит: точки K, L, M лежат на одной прямой.

Утверждение теоремы Паскаля верно и для самопересекающихся шестиугольников (рис.4), а также для шестиугольников, вписанных в эллипс и гиперболу. Оно верно даже для шести-

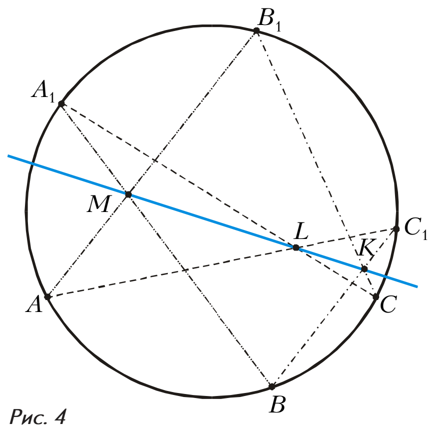

Рис. 4

угольников, «вписанных в две прямые». Мы не будем доказывать теорему Паскаля и сформулировали ее здесь лишь для того, чтобы менее неожиданной стала формулировка теоремы Паппа, которая наряду с теоремой Паскаля является одной из важнейших теорем проективной геометрии.

Теорема Паппа. *Пусть точки A, B, C лежат на одной стороне угла, а*

[2] *Для точки L рассуждение аналогично.*

точки A_1, B_1, C_1 – на другой (рис.5). Если прямые AB_1 и A_1B пересекаются в точке M, AC_1 и A_1C – в точке L, а BC_1 и B_1C – в точке K,

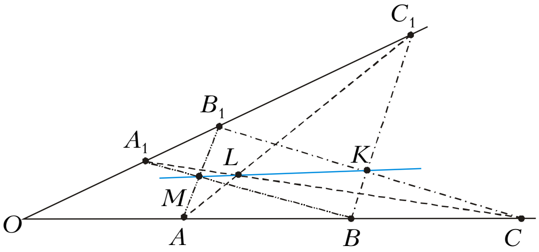

Рис. 5

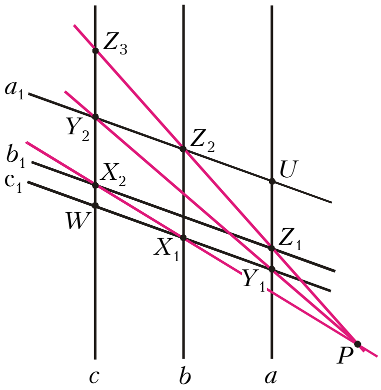

Рис. 6

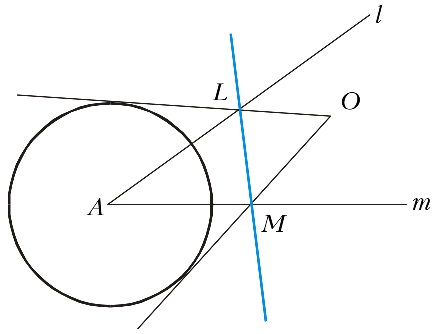

Рис. 7

то точки K, L, M лежат на одной прямой.[3]

Доказательство. Выполним полярное преобразование относительно окружности, центр которой – вершина O угла. Поляры a, b и c точек A, B и C перпендикулярны одной и той же стороне угла и потому параллельны между собой (рис.6). Аналогично, параллельны поляры a_1, b_1 и c_1 точек A_1, B_1 и C_1.

Поскольку точка M принадлежит прямой AB_1, то поляра точки M проходит через поляру прямой AB_1, т. е. через точку Z_1 пересечения прямых a и b_1. Аналогично, M принадлежит прямой A_1B, и, значит, поляра ее проходит через поляру прямой A_1B – точку Z_2 пересечения прямых a_1 и b.

Итак, поляра точки M – это прямая Z_1Z_2. Аналогично, поляры точек L и K – прямые Y_1Y_2 и X_1X_2, где $Y_1 = a \cap c_1$, $Y_2 = a_1 \cap c$, $X_1 = b \cap c_1$ и $X_2 = b_1 \cap c$.

Давайте докажем, что поляры точек K, L и M – прямые X_1X_2, Y_1Y_2 и Z_1Z_2 – пересекаются в одной точке или параллельны. Этого достаточно для доказательства теоремы Паппа: если три прямые пересекаются в некоторой точке, то поляра их точки пересечения проходит через все три точки K, L, M; если же прямые X_1X_2, Y_1Y_2 и Z_1Z_2 параллельны, то точки K, L и M лежат на перпендикуляре, проведенном к этим прямым из точки O.

Предположим для начала, что прямые X_1X_2 и Y_1Y_2 пересекаются в некоторой точке P, а прямые Y_1Y_2 и Z_1Z_2 – в точке P^* (возможно, отличной от P; цель дальнейших вычислений – доказать, что $P = P^*$). Тогда, обозначив $W = c \cap c_1$, $X_3 = a \cap X_1X_2$ и обозначив расстояния между прямыми a и b через h, а расстояние между прямыми b и c через H, из подобия треугольников PX_2Y_2 и PX_3Y_1 имеем

$$\frac{PY_2}{PY_1} = \frac{X_2Y_2}{X_3Y_1},$$

а из подобия треугольников $X_3X_1Y_1$ и X_2X_1W имеем

$$\frac{X_3Y_1}{h} = \frac{X_2W}{H}.$$

Следовательно,

$$\frac{PY_2}{PY_1} = \frac{X_2Y_2}{X_3Y_1} = \frac{X_2Y_2 \cdot H}{X_2W \cdot h}.$$

Теперь выполним аналогичные вычисления для точки P^*. Обозначив $U = a \cap a_1$ и $Z_3 = c \cap Z_1Z_2$, из подобия треугольников $P^*Y_2Z_3$ и $P^*Y_1Z_1$ имеем

$$\frac{P^*Y_2}{P^*Y_1} = \frac{Y_2Z_3}{Y_1Z_1},$$

а из подобия треугольников $Y_2Z_3Z_2$ и UZ_1Z_2 имеем

$$\frac{Y_2Z_3}{H} = \frac{UZ_1}{h}.$$

Следовательно,

$$\frac{P^*Y_2}{P^*Y_1} = \frac{UZ_1 \cdot H}{Y_1Z_1 \cdot h} = \frac{X_2Y_2 \cdot H}{X_2W \cdot h}.$$

Таким образом,

$$\frac{PY_2}{PY_1} = \frac{P^*Y_2}{P^*Y_1},$$

откуда заключаем, что $P = P^*$.[4]

Разберем теперь случай, когда прямые X_1X_2 и Y_1Y_2 параллельны. В этом случае $X_3Y_1 = X_2Y_2$. Применяя уже доказанные нами формулы $Y_2Z_3 = UZ_1 \cdot H/h$ и $X_2W = X_3Y_1 \cdot H/h$, получаем

$$Y_2Z_3 = \frac{X_2Y_2 \cdot H}{h} = \frac{X_3Y_1 \cdot H}{h} = X_2W = Y_1Z_1.$$

Таким образом, $Y_2Z_3 = Y_1Z_1$, что и означает параллельность прямых Y_1Y_2 и Z_1Z_2.

Теорема Паппа доказана. Пришла пора признаться, что при помощи методов проективной геометрии (т.е. при помощи центральной проекции, переводящей некоторые точки в так называемые бесконечно удаленные точки) можно было доказать теорему Паппа проще, чем это только что было сделано, причем не только для рассмотренного выше случая угла, но и для случая произвольных двух прямых. Но согласитесь: полярное преобразование превратило утверждение теоремы Паппа в (на первый взгляд) совершенно другое утверждение!

Упражнения

1. Дан угол с вершиной A и со сторонами l и m, а также точка O внутри этого угла. Рассмотрим всевозможные окружности с центром в точке A, к которым можно провести касательные из точки O так, чтобы эти касательные пересекали прямые l и m в некоторых точках L и M соответственно (рис.7). Докажите, что все такие прямые LM пройдут через некоторую точку, не зависящую от радиуса окружности,

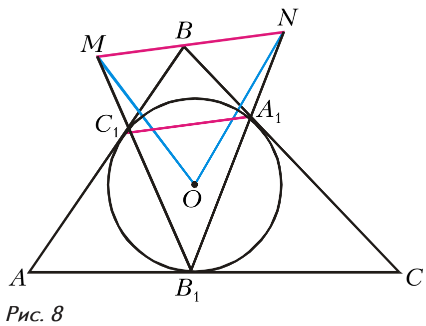

Рис. 8

[3] *Попросту говоря, теорема Паппа – это теорема Паскаля для шестиугольника, «вписанного в две прямые».*

[4] *Последний вывод может показаться (и является на самом деле) не вполне строгим. Но если бы мы чуть усложнили обозначения и следили не только за отношениями длин, но и за направлениями отрезков, то рассуждение стало бы чуть более тяжеловесным, но зато абсолютно строгим.*

а зависящую лишь от данной точки O и данного угла.

2. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно (рис.8). Через вершину B параллельно A_1C_1 проведена прямая, пересекающаяся с прямыми B_1C_1 и B_1A_1 в точках M и N соответственно. Докажите, что угол MON острый. (Эта задача предлагалась на Международной математической олимпиаде 1998 года.)