$10^n a + b = (10^n - 1)a + (a + b)$ кратно числу $10^n - 1$, то сумма $a + b$ тоже кратна числу $10^n - 1$. Заметив, что $0 < a + b < 2(10^n - 1)$, заключаем: $a + b = 10^n - 1$.

18. а) 15.

19. а) Поскольку $1986 = 2 \cdot 3 \cdot 331$, число $A = \underbrace{11\ldots1}_{1986}$ имеет кроме числа 1 и самого A еще шесть делителей из одних единиц: 11, 111, 111111, $\underbrace{11\ldots1}_{31}$, $\underbrace{11\ldots1}_{662}$ и $\underbrace{11\ldots1}_{993}$.

б) Поскольку $111111 = 111 \cdot 1001 = 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ и поскольку $10^{993} + 1$ кратно числу $10^3 + 1 = 1001$, а $10^{993} - 1$ кратно $10^3 - 1 = 999$, то, обозначив $a = 10^{331}$, получаем:

$$A = (a^6 - 1)/9 = (a^3 + 1)(a^3 - 1)/9 =$$

$$= 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \frac{a^3 + 1}{1001} \cdot \frac{a^3 - 1}{999}.$$

Произведение любого набора из этих семи множителей является делителем числа A («пустому набору» соответствует 1). Таким образом, мы нашли $2^7 = 128$ делителей. Все они различны, поскольку семь выписанных множителей попарно взаимно просты. (В самом деле, остаток от деления a на $m = 10^6 - 1$ равен 10, поскольку $10^{331} - 10 = 10(10^{6 \cdot 55} - 1)$ кратно m; поэтому $a^3 \pm 1$ при делении на m дает остаток $10^3 \pm 1$, так что числа $(a^3 + 1)/1001$ и $(a^3 - 1)/999$ взаимно просты с m и, очевидно, взаимно просты друг с другом.)

в) Продолжим разложение:

$$A = 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \frac{a + 1}{11} \cdot \frac{a^2 - a + 1}{91} \cdot \frac{a - 1}{9} \cdot \frac{a^2 + a + 1}{111}.$$

Отсюда видно, что A имеет не менее $2^9 = 512$ делителей. В силу малой теоремы Ферма число $9A = 10^{1986} - 1$ кратно простому числу 1987. Таким образом, один из четырех последних сомножителей разложения кратен 1987, а значит, A имеет не менее $2^{10} = 1024$ делителей.

20. а) 6; б) 6.

21. а) 4 или 12; б) 15, 30 или 60.

22. а) Обозначим ПЛОМБ = x. Тогда $(10x + А) \cdot 5 = 100000 \cdot А + x$, откуда $49x = 99995А$.

Ответ: ПЛОМБА = 142857.

б) 714285. в) $6000x + 6y = 1000y + x$, $5999x = 994y$, $859x = 142y$, откуда $x = 142$ и $y = 859$.

г) Да, таково число 142857.

д) 102564, 128205, 142857, 153846, 179487, 205128 и 230769.

23. *Указание*. Если $10000a + b$ кратно 41, то $10(10000a + b) = 99999a + a + 10b = 41 \cdot 2439a + (10b + a)$ тоже кратно 41.

24. 105263157894736842.

25. *Указание*. Записав числители в системе счисления с основанием a и «прокрутив» их, разбейте дроби на циклы по n дробей в каждом.

26. *Указание*. Это – переформулировка того факта, что $L(3^{n+2}) = 3^n$.

27. а) 81; б) 9^9; в) $2 \cdot 11^{10}$; г) $2 \cdot 3^k \cdot 7^{l-1}$.

28. На 2^6.

31. При делении «уголком» 1 на 3^{100} получаем периодическую десятичную дробь с периодом длины $M = 3^{98}$. Поэтому в процессе деления встретятся M различных остатков. Первый из остатков равен 1, а каждый следующий получается из предыдущего умножением на $10(= 9 + 1)$ и вычитанием числа, кратного 3^{100}. Эти процедуры не меняют остаток от деления на 9. Поэтому появляющиеся в процессе деления остатки имеют вид $9q + 1$, где $0 \le q < M$. Поскольку чисел такого вида ровно M штук, все они встретятся в качестве остатков. Остальное просто. Пусть $a = 0,a_1 a_1 \ldots a_{46}$ – десятичная дробь, $b = a + 10^{-46}$. Поскольку $3^{100} > 10^{47}$, разность чисел $3^{100}b$ и $3^{100}a$ больше 10. Следовательно, между ними найдется число вида $9q + 1$. В процессе деления, начиная с остатка $9q + 1$, будут получены все 46 цифр $a_1 a_1 \ldots a_{46}$: ведь $a < (9q + 1)/3^{100} < b$.

32. Известны два таких простых числа 487 и 56598313.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования
http://www.courier.com.ru

Vivos Voco!
http://www.accessnet.ru/vivovoco
(раздел «Из номера»)

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, М.М.Константинова, А.И.Пацхверия, М.А.Сумнина, В.М.Хлебникова, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ
Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»,
тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени
ГУП Чеховский полиграфический комбинат
Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
142300, г.Чехов Московской области,
Тел. (272) 71-336. Факс (272) 62-536
Заказ №