точки A_1, B_1, C_1 – на другой (рис.5). Если прямые AB_1 и A_1B пересекаются в точке M, AC_1 и A_1C – в точке L, а BC_1 и B_1C – в точке K,

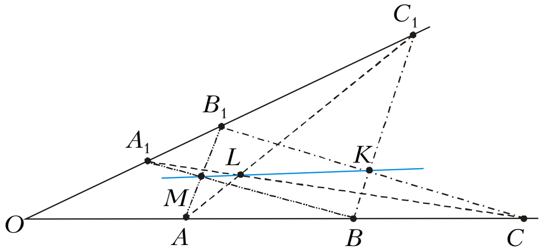

Рис. 5

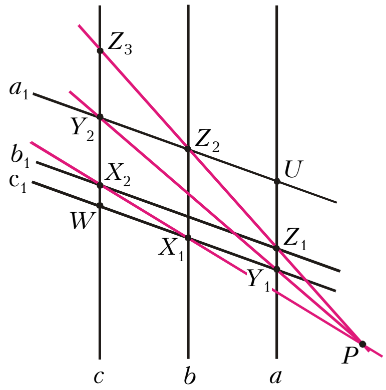

Рис. 6

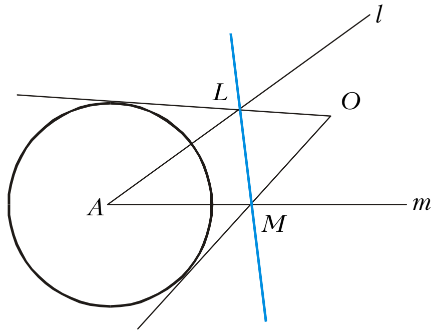

Рис. 7

то точки K, L, M лежат на одной прямой.[3]

Доказательство. Выполним полярное преобразование относительно окружности, центр которой – вершина O угла. Поляры a, b и c точек A, B и C перпендикулярны одной и той же стороне угла и потому параллельны между собой (рис.6). Аналогично, параллельны поляры a_1, b_1 и c_1 точек A_1, B_1 и C_1.

Поскольку точка M принадлежит прямой AB_1, то поляра точки M проходит через поляру прямой AB_1, т. е. через точку Z_1 пересечения прямых a и b_1. Аналогично, M принадлежит прямой A_1B, и, значит, поляра ее проходит через поляру прямой A_1B – точку Z_2 пересечения прямых a_1 и b.

Итак, поляра точки M – это прямая Z_1Z_2. Аналогично, поляры точек L и K – прямые Y_1Y_2 и X_1X_2, где $Y_1 = a \cap c_1$, $Y_2 = a_1 \cap c$, $X_1 = b \cap c_1$ и $X_2 = b_1 \cap c$.

Давайте докажем, что поляры точек K, L и M – прямые X_1X_2, Y_1Y_2 и Z_1Z_2 – пересекаются в одной точке или параллельны. Этого достаточно для доказательства теоремы Паппа: если три прямые пересекаются в некоторой точке, то поляра их точки пересечения проходит через все три точки K, L, M; если же прямые X_1X_2, Y_1Y_2 и Z_1Z_2 параллельны, то точки K, L и M лежат на перпендикуляре, проведенном к этим прямым из точки O.

Предположим для начала, что прямые X_1X_2 и Y_1Y_2 пересекаются в некоторой точке P, а прямые Y_1Y_2 и Z_1Z_2 – в точке P^* (возможно, отличной от P; цель дальнейших вычислений – доказать, что $P = P^*$). Тогда, обозначив $W = c \cap c_1$, $X_3 = a \cap X_1X_2$ и обозначив расстояния между прямыми a и b через h, а расстояние между прямыми b и c через H, из подобия треугольников PX_2Y_2 и PX_3Y_1 имеем

$$\frac{PY_2}{PY_1} = \frac{X_2Y_2}{X_3Y_1},$$

а из подобия треугольников $X_3X_1Y_1$ и X_2X_1W имеем

$$\frac{X_3Y_1}{h} = \frac{X_2W}{H}.$$

Следовательно,

$$\frac{PY_2}{PY_1} = \frac{X_2Y_2}{X_3Y_1} = \frac{X_2Y_2 \cdot H}{X_2W \cdot h}.$$

Теперь выполним аналогичные вычисления для точки P^*. Обозначив $U = a \cap a_1$ и $Z_3 = c \cap Z_1Z_2$, из подобия треугольников $P^*Y_2Z_3$ и $P^*Y_1Z_1$ имеем

$$\frac{P^*Y_2}{P^*Y_1} = \frac{Y_2Z_3}{Y_1Z_1},$$

а из подобия треугольников $Y_2Z_3Z_2$ и UZ_1Z_2 имеем

$$\frac{Y_2Z_3}{H} = \frac{UZ_1}{h}.$$

Следовательно,

$$\frac{P^*Y_2}{P^*Y_1} = \frac{UZ_1 \cdot H}{Y_1Z_1 \cdot h} = \frac{X_2Y_2 \cdot H}{X_2W \cdot h}.$$

Таким образом,

$$\frac{PY_2}{PY_1} = \frac{P^*Y_2}{P^*Y_1},$$

откуда заключаем, что $P = P^*$.[4]

Разберем теперь случай, когда прямые X_1X_2 и Y_1Y_2 параллельны. В этом случае $X_3Y_1 = X_2Y_2$. Применяя уже доказанные нами формулы $Y_2Z_3 = UZ_1 \cdot H/h$ и $X_2W = X_3Y_1 \cdot H/h$, получаем

$$Y_2Z_3 = \frac{X_2Y_2 \cdot H}{h} = \frac{X_3Y_1 \cdot H}{h} = X_2W = Y_1Z_1.$$

Таким образом, $Y_2Z_3 = Y_1Z_1$, что и означает параллельность прямых Y_1Y_2 и Z_1Z_2.

Теорема Паппа доказана. Пришла пора признаться, что при помощи методов проективной геометрии (т.е. при помощи центральной проекции, переводящей некоторые точки в так называемые бесконечно удаленные точки) можно было доказать теорему Паппа проще, чем это только что было сделано, причем не только для рассмотренного выше случая угла, но и для случая произвольных двух прямых. Но согласитесь: полярное преобразование превратило утверждение теоремы Паппа в (на первый взгляд) совершенно другое утверждение!

Упражнения

1. Дан угол с вершиной A и со сторонами l и m, а также точка O внутри этого угла. Рассмотрим всевозможные окружности с центром в точке A, к которым можно провести касательные из точки O так, чтобы эти касательные пересекали прямые l и m в некоторых точках L и M соответственно (рис.7). Докажите, что все такие прямые LM пройдут через некоторую точку, не зависящую от радиуса окружности,

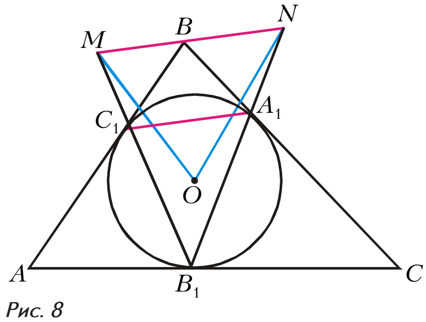

Рис. 8

---

[3] *Попросту говоря, теорема Паппа – это теорема Паскаля для шестиугольника, «вписанного в две прямые».*

[4] *Последний вывод может показаться (и является на самом деле) не вполне строгим. Но если бы мы чуть усложнили обозначения и следили не только за отношениями длин, но и за направлениями отрезков, то рассуждение стало бы чуть более тяжеловесным, но зато абсолютно строгим.*