вых и произведения правых частей первых двух. Обозначив через a длину горизонтальной стороны прямоугольника $KLMN$, а через b – длину его вертикальной стороны, запишем основное равенство:

$$LA_3(b-KA_1)+NA_7(b-MA_5)+ KA_1(a-NA_7)+MA_5(a-LA_3)= MA_4(b-NA_6)+KA_8(b-MA_5)+ LA_2(a-MA_4)+NA_6(a-KA_8).$$

Это равенство непосредственно следует из трех вспомогательных равенств. Оно означает, что сумма площадей четырех прямоугольных треугольников LA_1A_3, NA_5A_7, KA_7A_1 и MA_3A_5 равна сумме площадей треугольников MA_6A_4, KA_2A_8, LA_4A_2 и NA_8A_6. Но в таком случае площади четырехугольников $A_1A_3A_5A_7$ и $A_2A_4A_6A_8$ равны.

В.Произволов

М1710*. *Пусть x, y, z, p, q, r – положительные числа такие, что $p+q+r=1$, $x^py^qz^r=1$. Докажите неравенство*

$$\frac{p^2x^2}{qy+rz}+\frac{q^2y^2}{px+rz}+\frac{r^2z^2}{px+qy}\ge\frac{1}{2}.$$

Докажем вначале некоторые вспомогательные неравенства.

Лемма 1.

$$x^\alpha-\alpha x\le 1-\alpha, \qquad (1)$$

где $x>0$, $0<\alpha<1$.

Доказательство. При $x>0$ рассмотрим функцию

$$f(x)=x^\alpha-\alpha x,$$

где $0<\alpha<1$. Имеем

$$f'(x)=\alpha\left(x^{\alpha-1}-1\right)\begin{cases}>0 \text{ при } 0<x<1,\\ <0 \text{ при } x>1.\end{cases}$$

Следовательно, функция возрастает, пока x изменяется в промежутке $(0;\ 1]$, и убывает в промежутке $[1;\ +\infty)$. Отсюда ясно, что $f(1)=1-\alpha$ будет наибольшим значением функции в промежутке $(0;\ +\infty)$.

Лемма 2.

$$a^\alpha b^\beta\le\alpha a+\beta b, \qquad (2)$$

где a, b, α, $\beta>0$, $\alpha+\beta=1$.

Для доказательства достаточно положить в (1) $x=\frac{a}{b}$ и обозначить $1-\alpha$ через β.

Лемма 3.

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma\le\alpha a+\beta b+\gamma c,$$

где $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma>0$, $\alpha+\beta+\gamma=1$.

Для доказательства достаточно применить дважды неравенство (2):

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma=a^\alpha\left(b^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}}c^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}}\right)^{\beta+\gamma}\le\alpha a+(\beta+\gamma)b^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}}c^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}}\le$$

$$\le\alpha a+(\beta+\gamma)\left(\frac{\beta}{\beta+\gamma}b+\frac{\gamma}{\beta+\gamma}c\right)=\alpha a+\beta b+\gamma c,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично можно было бы совершить и переход от n к $n+1$ и доказать – по методу математической индукции – общее неравенство, которое (в измененных обозначениях) имеет вид

$$a_1^{q_1}a_2^{q_2}\ldots a_n^{q_n}\le q_1a_1+q_2a_2+\ldots+q_na_n \qquad (3)$$

(где $a_1,\ldots,a_n,\ q_1,\ldots,q_n>0,\ q_1+\ldots+q_n=1$).

Равенство достигается лишь тогда, когда $a_1=\ldots=a_n$.

Перейдем теперь к доказательству неравенства задачи. Воспользуемся неравенством Коши–Буняковского

$$\left(u_1u_2+v_1v_2+w_1w_2\right)^2\le\left(u_1^2+v_1^2+w_1^2\right)\left(u_2^2+v_2^2+w_2^2\right),$$

где u_i, v_i, w_i $(i=1,\ 2)$ – действительные числа. Полагая

$$u_1=\frac{px}{\sqrt{qy+rz}},\ v_1=\frac{qy}{\sqrt{px+rz}},\ w_1=\frac{rz}{\sqrt{px+qy}},$$

$$u_2=\sqrt{qy+rz},\ v_2=\sqrt{px+rz},\ w_2=\sqrt{px+qy},$$

будем иметь неравенство

$$(px+qy+rz)^2\le\left(\frac{p^2x^2}{qy+rz}+\frac{q^2y^2}{px+rz}+\frac{r^2z^2}{px+qy}\right)\times 2(px+qy+rz),$$

из которого следует, что

$$\frac{p^2x^2}{qy+rz}+\frac{q^2y^2}{px+rz}+\frac{r^2z^2}{px+qy}\ge\frac{1}{2}(px+qy+rz).$$

Так как $p+q+r=1$, то для оценки суммы $px+qy+rz$ снизу можно применить неравенство леммы 3:

$$px+qy+rz\ge x^py^qz^r=1.$$

Неравенство задачи доказано.

Замечание 1. Полагая в неравенстве (3) $q_1=\ldots=q_n=\frac{1}{n}$, получим

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\le\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Из неравенства (3) нетрудно вывести также и некоторые другие классические утверждения. Например, легко получить так называемое неравенство Коши–Гёльдера:

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\le\left\{\sum_{i=1}^n a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}}\cdot\left\{\sum_{i=1}^n b_i^{k'}\right\}^{\frac{1}{k'}}$$

(где $a_i,b_i>0;\ k,k'>1,\ \frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$),

а также неравенство, носящее имя Минковского:

$$\left\{\sum_{i=1}^n\left(a_i+b_i\right)^k\right\}^{\frac{1}{k}}\le\left\{\sum_{i=1}^n a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}}+\left\{\sum_{i=1}^n b_i^k\right\}^{\frac{1}{k}}$$

(где $a_i,b_i>0,\ k>1$).

Замечание 2. Положим в неравенстве задачи $p=q=r=\frac{1}{3}$:

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{3}{2}.$$