ни Гаусс был признан величайшим и коронован титулом «Mathematicorum Princeps»[2].

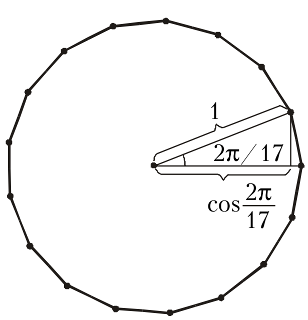
«Математическая деятельность Гаусса, – писал Феликс Клейн, – началась одним крупным открытием, которое привело его к твердому убеждению навсегда посвятить себя науке... 30 марта 1796 года ему – девятнадцатилетнему – удалось показать, что правильный семнадцатиугольник может быть построен с помощью циркуля и линейки», т.е. совершить прорыв в проблеме, где не было никакого прогресса в течение свыше 2000 лет.

Потомки постарались выполнить завещание великого ученого. Они воздвигли ему памятник (на родине, в Брауншвейге), который стоит на постаменте, являющемся правильным семнадцатиугольником. Но если не знать этого, то и не заметишь: правильный семнадцатиугольник почти неотличим от круга.

Теорема 5. *Правильный семнадцатиугольник может быть построен с помощью циркуля и линейки.*

Приводимое доказательство — лишь незначительная обработка доказательства самого Гаусса.

Доказательство. Для построения правильного семнадцатиугольника, вписанного в окружность радиуса 1, достаточно построить отрезок длины $\cos\frac{2\pi}{17}$ (см. рисунок). Дальнейшая последовательность действий не вызывает трудностей. Однако для этого построения нам потребуются некоторые соотношения между комплексными числами.



Обозначим через ε один из комплексных корней семнадцатой степени из единицы:

$$\varepsilon = e^{2\pi i/17} = \cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17}.$$

Введем обозначения:

$$z_1 = \varepsilon + \varepsilon^{-1}, \quad z_2 = \varepsilon^4 + \varepsilon^{-4},$$

$$y_1 = z_1 + z_2,$$

$$y_2 = \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-8},$$

$$y_3 = z_1 z_2,$$

$$y_4 = \left(\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2}\right)\left(\varepsilon^8 + \varepsilon^{-8}\right),$$

$$x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_3 + y_4.$$

Заметим, что все эти числа действительные. В самом деле,

$$\varepsilon^k + \varepsilon^{-k} = \left(\cos\frac{2\pi k}{17} + i\sin\frac{2\pi k}{17}\right) + \left(\cos\frac{-2\pi k}{17} + i\sin\frac{-2\pi k}{17}\right) = 2\cos\frac{2\pi k}{17}.$$

Поскольку $z_1 = 2\cos\frac{2\pi}{17}$, нам достаточно построить отрезок длины z_1.

Лемма 1. $\varepsilon^k = \varepsilon^{17+k}$ *при целых* k.

Действительно,

$$\varepsilon^{17+k} = \cos\frac{2\pi(17+k)}{17} + i\sin\frac{2\pi(17+k)}{17} = \cos\left(2\pi + \frac{2\pi k}{17}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{2\pi k}{17}\right) = \cos\frac{2\pi k}{17} + i\sin\frac{2\pi k}{17} = \varepsilon^k.$$

Лемма 2. $\sum_{k=0}^{16} \varepsilon^k = 0$.

По формуле суммы геометрической прогрессии (которая, конечно, верна и для комплексных чисел) получаем

$$\sum_{k=0}^{16} \varepsilon^k = \frac{\varepsilon^{17} - 1}{\varepsilon - 1} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^{16} \varepsilon^k = \left(\sum_{k=0}^{16} \varepsilon^k\right) - \varepsilon^0 = 0 - 1 = -1,$$

т.е. $\sum_{k=1}^{8} \left(\varepsilon^k + \varepsilon^{-k}\right) = -1$.

Лемма 3. $y_1 y_2 = y_3 y_4 = -1$.

Действительно,

$$y_1 y_2 = \left(\varepsilon + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^4 + \varepsilon^{-4}\right) \times \left(\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-8}\right) =$$

$$= \varepsilon^3 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^9 + \varepsilon^{-7} + \varepsilon^1 + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-9} + \varepsilon^6 + \varepsilon^2 + \varepsilon^{12} + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^4 + \varepsilon^{-12} = \sum_{k=1}^{8} \left(\varepsilon^k + \varepsilon^{-k}\right) = -1.$$

Аналогично, $y_3 y_4 = -1$.

Лемма 4. $x_1 + x_2 = -1$, $x_1 x_2 = -4$. (Доказательство предоставляем читателю.)

Напомним, что если заданы отрезки длины 1, $|p|$ и $|q|$, то циркулем и линейкой можно построить отрезок, длина которого равны абсолютной величине корня квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Поскольку $x_1 + x_2 = -1$, $x_1 x_2 = -4$, то по теореме Виета x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + x - 4 = 0$, а значит, мы можем построить отрезки длины $|x_1|$ и $|x_2|$.

Теперь, так как $y_1 + y_2 = x_1$ и $y_1 y_2 = -1$, можно построить отрезки длины $|y_1|$ и $|y_2|$. Из равенств $y_3 + y_4 = x_2$ и $y_3 y_4 = -1$ получаем отрезки длины $|y_3|$ и $|y_4|$. И наконец, используя равенства $z_1 + z_2 = y_1$ и $z_1 z_2 = y_3$, мы можем построить отрезок длины $|z_1|$, а следовательно, и правильный семнадцатиугольник.

Воспользовавшись этим рассуждением, можно получить следующее выражение для $\cos\frac{2\pi}{17}$:

$$\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16}\left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - 2\left(1 - \sqrt{17}\right)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}\right).$$

Впоследствии было доказано, что правильный n-угольник можно построить циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда $n = 2^k F_1 F_2 \cdot \ldots \cdot F_k$, где все F_i – различные простые числа вида $2^{2^s} + 1$ (числа Ферма). У Ферма было подозрение, что все числа вида $2^{2^s} + 1$ – простые. Эйлер опроверг это утверждение, указав, что число

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297$$

имеет простым делителем 641. В наш компьютерный век стало возможным исследовать на простоту достаточно большие числа, но пока ни одного простого числа Ферма, кроме 3, 5, 17, 257 и 65537, не найдено.

[2] *Король математиков (лат.).*