пе, и *маленьким*, если не является. В каждой группе сумма двух наибольших чисел не превосходит 1999 + 1998= = 3997, поэтому сумма остальных (маленьких) чисел группы не превосходит $3997/9 < 445$. Следовательно, маленькие числа не превосходят 444. Так как в каждой группе есть хотя бы одно маленькое число, разбиение состоит не более чем из 444 групп. Значит, количество больших чисел не превосходит 888 и всего больших и маленьких чисел не более 888 + 444, что меньше 1999. Противоречие.

6. Предположим, что такие x и y существуют. Возведем обе части равенства в куб:

$$p = x + 3\sqrt[3]{xy}\cdot\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{xy}\cdot\sqrt[3]{y} + y = x + y + 3\sqrt[3]{xy}\cdot\sqrt[3]{p}.$$

Отсюда легко получить, что pxy – куб натурального числа. Следовательно, хотя бы одно из чисел x, y кратно p, но $x < p$ и $y < p$.

7. Для любых островитян A и B рассмотрим *кратчайшую* цепочку переводчиков, с помощью которой они могут общаться между собой. Предположим, что в цепочке 16 или более переводчиков. Добавим A в начало, B – в конец; получится цепочка не менее чем из 18 человек. Заметим, что 1-й, 3-й, 5-й, ..., 13-й и 15-й человек в цепочке говорят на разных языках (иначе цепочку можно было бы сократить), поэтому вместе они знают по крайней мере $8 \cdot 5 = 40$ различных языков. Эти языки неизвестны 17-му и 18-му, поэтому на долю этих двоих остается не более пяти языков. Значит, 17-й и 18-й знают одни и те же пять языков. Это противоречит тому, что цепочка – кратчайшая.

8. Они пересекаются в середине стороны AC.

9. Пусть $a + b + c + d = p$ – простое число. Так как $(a+b)^2 - ab = (c+d)^2 - cd$, то

$$ab - cd = (a+b)^2 - (c+d)^2 = (a+b+c+d)(a+b-c-d).$$

Следовательно,

$$(a+c)(b+c) = ab + ac + cb + c^2 \equiv cd + ac + cb + c^2 = pc \equiv 0 \pmod{p},$$

произведение $(a+c)(b+c)$ кратно p. Но оба множителя $a + c$ и $b + c$ больше 1 и меньше p.

10. Если у прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата $ABCD$, одна из вершин совпадает с B, а противоположная вершина лежит на диагонали AC, то периметр прямоугольника равен $2a$, где a – длина стороны квадрата.

Рассмотрим прямоугольник разбиения, содержащий вершину B. Поскольку его можно уменьшить до прямоугольника, вершина которого лежит на диагонали AC, то периметр рассматриваемого прямоугольника больше $2a$. Осталось заметить, что любой прямоугольник с периметром больше $2a$ пересечен диагональю BD.

11. Наибольший общий делитель d любых двух соседних членов последовательности равен наибольшему общему делителю первых двух ее членов. Продолжая написанную на доске последовательность, мы будем брать разность до тех пор, пока в последовательности дважды подряд не появится число d. Таким же образом мы продолжим последовательность влево (т.е. в направлении убывания номеров, добавляемым членам будем присваивать нулевой и отрицательные номера) до тех пор, пока в ней тоже не появится два раза подряд число d. Повторив фрагмент «от левых двух d до правых двух d», мы повторим в том числе и начальный фрагмент последовательности.

12. *Указание.* Каждая диагональ шестиугольника лежит в плоскости, проходящей через два противоположных ребра куба.

13. Добавим «виртуальную» машину, которая начнет движение ровно через 2 минуты после первой. Поскольку состояния светофоров меняются с периодом 2 минуты, то каждый светофор виртуальная машина будет проезжать ровно через 2 минуты после первой и поэтому никогда не догонит первую машину. Вторая машина никогда не обгонит виртуальную машину, а потому не догонит и первую машину.

15. *Указание.* Докажите, что число a_k при четных k делится на 3, а при $k = 2^n(2m-1) - 1$, где n, m – натуральные числа, делится на $2^{2^n} + 1$.

16. Для всех n, являющихся степенями двойки.

21. 2525.

Московская олимпиада студентов по физике

1. $a = 2\omega v_0$. **2.** $v_{\text{ср}} = \sqrt{v_0^2 + \left(F/(m\omega)\right)^2}$.

3. $A = mgh + \dfrac{mv_0^2}{2}\left(\sqrt{\dfrac{l}{l-h}} - 1\right)$. **4.** $f = \sigma^2 R/(2\varepsilon_0)$.

5. $\varphi = Q/(6\pi\varepsilon_0 R)$. **6.** $I_{\text{ср}} = U_0/(4\omega L)$.

7. $I = 2I_0\left(w_2^2 + w_1^2\right)/\left(w_1 + w_2\right)^2$.

8. $\Delta S = -\dfrac{m}{\mathrm{M}} C_V \ln \dfrac{T}{2^{\gamma-1}T_0}$. **9.** $Q = (m/\mathrm{M})RT/2$.

10. $I_{\max} = I_0\left(\dfrac{1}{2} + \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$, $I_{\min} = I_0\left(\dfrac{1}{2} + \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.В.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, М.М.Константинова, А.И.Пацхверия, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»,
тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени
ГУП Чеховский полиграфический комбинат
Министерства Российской Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
142300, г.Чехов Московской области,
Тел. (272) 71-336. Факс (272) 62-536
Заказ №