Вариант 2

1. 4,1. **2.** −8. **3.** 0,3. **4.** −18. **5.** 7. **6.** −0,5. **7.** −1. **8.** −10. **9.** 2,9. **10.** 0,4. **11.** 30,72. **12.** 8.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. 105 Н. **2.** 100 с. **3.** 12 Дж. **4.** 6 $м/с^2$.
5. 127 Дж. **6.** 33 кДж. **7.** 801 $с^{-1}$.
8. 3. **9.** 2 м. **10.** 4 мм. **11.** 3 м/с. **12.** 80 см.

Вариант 2

1. 20 м. **2.** 14 кг · м/с. **3.** 7 м/с.
4. 140 кг. **5.** 4. **6.** 16. **7.** 12 мм. **8.** 9 см.
9. 6 с. **10.** 200 кПа. **11.** 8 Вт. **12.** 2 Тл.

Санкт-Петербургский государственный технический университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\frac{4}{a-4}$. **2.** 1. **3.** 8. **4.** $\frac{3}{4}$. **5.** $-\frac{1}{2}$. **6.** 9. **7.** 1. **8.** $-\sqrt{3}$. **9.** $\frac{\pi}{2}$.

10. $(-\infty;-1)\cup(-1;1)$. **11.** $(-2;1]$. **12.** $[-2;-1)\cup(1;+\infty)$.

13. (1; 3]. **14.** $\frac{n\pi}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

15. Четыре вектора: (−3; −3); (−1; 1); (1; −1); (3; 3).

16. $\left\{-1;\frac{1}{3}\right\}$. **17.** 3. **18.** $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **19.** 20 или 80. **20.** 4.

Вариант 2

1. −2. **2.** 12. **3.** 20%. **4.** 2. **5.** 1. **6.** −2. **7.** {1; 3}. **8.** {1; 16}.

9. −3. **10.** −1. **11.** πn, $-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **12.** $(-2;1)\cup(1;-2)$.

13. $\sqrt{2}$. **14.** $[-3;-1)\cup\{0\}$. **15.** (−2; 0), (−1; 1). **16.** $\left[-1;\frac{1}{3}\right]$.
17. (0; 4]. **18.** {−1; 2}. **19.** 3. **20.** $-1\le p\le 0$.

XL Международная математическая олимпиада

1. Обозначим через r_{PQ} отражение относительно прямой, проходящей перпендикулярно отрезку PQ через его середину, через G – центр тяжести S. Поскольку $r_{AB}(S)=S$, то $r_{AB}(G)=G$ для любых $A,B\in S$, а значит, все точки множества S равноудалены от G. Отсюда видно, что S лежит на некоторой окружности. Точки S задают выпуклый многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$. Отражение относительно серединного перпендикуляра отрезка A_1A_3 переводит каждую полуплоскость, ограниченную A_1A_3, в себя, следовательно, образом точки A_2 может быть только она сама: $r_{A_1A_3}(A_2)=A_2$; отсюда $A_1A_2=A_2A_3$. Аналогично, $A_2A_3=A_3A_4=\ldots=A_nA_1$. А так как точки A_1, A_2, …, A_n лежат на окружности, то многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ – правильный.

2. Неравенство симметрично и однородно, поэтому можно считать, что $x_1\ge x_2\ge\ldots\ge x_n\ge 0$ и $\sum_i x_i=1$. Положим
$$F(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i<j}x_ix_j\left(x_i^2+x_j^2\right).$$
Мы попробуем увеличить значение F, заменяя
$$x=(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},0,\ldots,0)$$
на
$$x'=(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k+x_{k+1},0,\ldots,0)$$
(здесь x_{k+1} – последнее ненулевое число набора, $k\ge 2$):
$$F(x')-F(x)=x_kx_{k+1}\left(3(x_k+x_{k+1})\sum_{i=1}^{k-1}x_i-x_k^2-x_{k+1}^2\right)=$$
$$=x_kx_{k+1}\left(3(x_k+x_{k+1})(1-x_k-x_{k+1})-x_k^2-x_{k+1}^2\right)=$$
$$=x_kx_{k+1}\left((x_k+x_{k+1})\left(3-4(x_k+x_{k+1})\right)+2x_kx_{k+1}\right).$$
Так как
$$1\ge x_1+x_k+x_{k+1}\ge\frac{1}{2}(x_k+x_{k+1})+x_k+x_{k+1},$$
то
$$3/4>2/3\ge x_k+x_{k+1},$$
следовательно,
$$F(x')-F(x)>0.$$
Повторив указанную выше замену несколько раз, получим
$$F(x)\le F(a,b,0,\ldots,0)=$$
$$=ab\left(a^2+b^2\right)=\frac{1}{2}(2ab)(1-2ab)\le\frac{1}{8}=F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\ldots,0\right).$$
Значит, $C=1/8$. Равенство выполнено тогда и только тогда, когда два числа набора x_1, …, x_n равны между собой, а остальные числа равны нулю.

4. При $n=1$ в качестве p можно взять любое простое число. Если n четно, то четно и p; значит, $p=2$, $n=2$.
Пусть n – нечетное число, большее 1; обозначим через q наименьший простой делитель n. Очевидно, $p\ge 3$, $q\ge 3$.
Имеем:
$$(p-1)^{2n}\equiv 1(\mathrm{mod}\ q),\ (p-1)^{q-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\ q)$$
(по малой теореме Ферма). Обозначим через y наименьшее натуральное число такое, что $(p-1)^y\equiv 1(\mathrm{mod}\ q)$. Легко видеть, что y делит числа $2n$ и $q-1$. Но $\text{НОД}(n,q-1)=1$; следовательно, $y=1$ или $y=2$.
Значит, $(p-1)^n+1\equiv 2(\mathrm{mod}\ q)$ либо $(p-1)^n+1\equiv p(\mathrm{mod}\ q)$. В первом случае было бы $q=2$. Во втором случае $q=p$.
Пусть $n>q$. Вследствие выбора q имеем $\sqrt{n}\ge q$, $2q\ge q^2$, т.е. $q=2$.
Пусть $n=q$. В этом случае p^{p-1} делит число
$$(p-1)^p+1=p^2\left(p^{p-2}-C_p^1p^{p-3}+\ldots+C_p^{p-3}p-C_p^{p-2}+1\right),$$
откуда, поскольку все выражения в скобках, кроме одного, делятся на p, получаем $p-1\le 2$. Значит, осталось только $p=3$ и $n=3$.
Окончательно, решениями являются пары (2, 2), (3, 3) и (1, p), где p – произвольное простое число.

XXX Международная олимпиада школьников по физике

Задача 1. 1) $T=322$ К = 49 °С, $p=102{,}32$ кПа; 2) $A=24{,}1$ Дж; 3) $W=84$ Дж; 4) $P=8{,}4$ Вт, $n=2{,}2\cdot10^{19}$ $с^{-1}$; 5) $\delta=2{,}8\cdot10^{-3}\approx 0{,}3\%$; 6) $p'=p_0$, $T'=321$ К = 48 °С.

Задача 2. 1) Магнитная индукция перпендикулярна плоскости рисунка 1 из статьи и направлена на читателя; 2) $k=i\mu_0/(2\pi d)$; 3) магнитная индукция в точке P^* равна $B(P^*)=k\,\mathrm{ctg}(\alpha/2)$ и направлена противоположно индукции в точке P; 4) $T=2\pi\sqrt{I/(\mu B)}$; 5) $0<\alpha<44°$.

Задача 3. 1) $V\approx 1{,}306\cdot10^4$ м/с; 2) $\rho=2{,}333\cdot10^{10}$ м; 3) $\varphi\approx 37{,}4°$, $v'=1{,}65\cdot10^4$ м/с; 4) $E=112$ ГДж;

5) $\Delta\theta=\pi-2\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+v'^4b^2/\left(G^2M^2\right)}}$;

6) $b_{\min}=4{,}90\cdot10^8$ м, $\Delta\theta_{\max}\approx 87{,}4°$;