R. По условию, радиус основания «ваньки-встаньки» $r = R$. Отклоним игрушку на угол α относительно равновесного вертикального положения. Смещение центра тяжести ΔH по вертикали равно (см. упражнение 1)

$$\Delta H = \Delta h_1 + \Delta h_2 = -r - x - 2r\cos\alpha - r\cos 2\alpha + x\cos 2\alpha =$$
$$= -4r\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2(r-x)\sin^2\alpha,$$

где x – искомая величина расстояния CP от точки контакта игрушки с опорой (в положении равновесия) до центра тяжести. По условию, качение игрушки на опоре происходит без проскальзывания.

Как видно из формулы для ΔH, у игрушки с высоко расположенным центром тяжести, т.е. когда $x \approx r$, величина ΔH всегда отрицательна, поэтому равновесие неустойчивое. Но при небольших значениях x, т.е. когда центр тяжести «ваньки-встаньки» находится вблизи его основания, величина ΔH положительна, и игрушка на вершине сферы находится в равновесии. При ее отклонении на угол α она возвращается в исходное положение, если угол α не слишком велик. С ростом угла α центр тяжести игрушки поднимается, достигает максимальной высоты (при некотором угле α_0) и далее начинает опускаться. Как обычно при поиске экстремума, величина α_0 определяется из условия $\frac{dH}{d\alpha} = 0$, откуда находим

$$\cos\alpha_0 = \frac{R}{2(r-x)}, \text{ или } \frac{x}{r} = 1 - \frac{1}{2\cos\alpha_0}.$$

На рисунке 5 приводится график зависимости x/r от α_0. Из этого графика можно определить положение центра тяжести игрушки, если известен предельный угол α_0. Очевидно, что по условию α_0 не должен превышать $\pi/3$, а тогда центр тяжести оказывается удаленным от точки контакта с опорой на расстояние, меньшее $r/2$.

Чем ниже центр тяжести, тем устойчивее тело на опоре и тем шире область устойчивости. В нашей задаче из всех тел наибольшей устойчивостью обладает легкая, почти невесомая сфера с компактной, но тяжелой массой, закрепленной около ее основания. При качении такого тела по круглой опоре без проскальзывания центр тяжести тела описывает кривую, которая называется кардиоидой. (Это алгебраическая кривая четвертого порядка, частный случай так называемой эпициклоиды.) Уравнение кардиоиды в декартовых прямоугольных

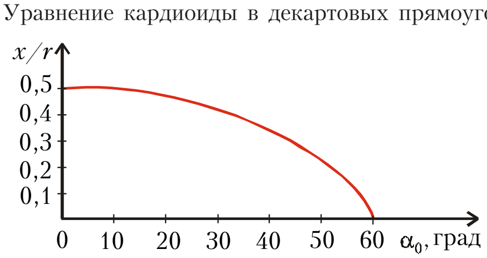

Рис. 5

координатах имеет вид $\left(x^2 + y^2 + 2ry\right)^2 = 4r^2\left(x^2 + y^2\right)$. Кардиоиду можно легко построить самим по точкам с помощью циркуля и линейки. По виду она напоминает сердце (рис.6), и этот факт отражен в самом названии кривой: греческое слово kardia означает сердце.

Мы показали, что угол между осью кардиоиды и отрезком, проведенным в точку, в которой касательная к кардиоиде параллельна x, равен $\alpha_{0\max}/2 = 30°$. Соответствующий этой точке максимальный подъем центра тяжести игрушки равен $\Delta H = r/2$. Если центр тяжести игрушки находится выше границы основания, то при вращении без проскальзывания на сфере того же радиуса этот центр описывает кривую, которая называется укороченной кардиоидой – одной из разновидностей улитки Паскаля.

3. Из условия задачи и неравенства $\frac{1}{CP} > \frac{1}{R} + \frac{1}{r}$ следует, что центр тяжести полушария находится от нижней его точки на расстоянии, меньшем $5r/8$. Но в точке на расстоянии $5r/8$ находится, как известно, центр тяжести однородного полушария. Таким образом, по сравнению с однородным телом такой же формы полушарие утяжелено книзу, чем и достигается устойчивость его равновесного положения на закрепленной сферической поверхности такого же радиуса.

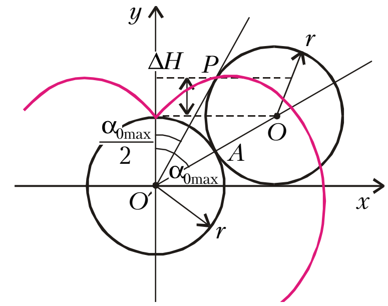

Рис. 6

4. Проскальзывание приведет к тому, что область устойчивости положения равновесия сузится. Для очень гладких и скользких поверхностей возможен случай, когда равновесие будет неустойчивым, где бы ни находился центр тяжести тела.

5. У скалы, вообще говоря, могут быть другие равновесные положения. Поэтому ее можно опрокинуть, наклонив на достаточно большой угол.

Калейдоскоп «Кванта»

1. *Указание*: отнюдь не шесть десятков.

2. 3 минуты.

3. Нет, не зависит. Условимся писать вместо знака «+» число +1, а вместо знака «–» – число –1. Операция стирания двух знаков не меняет произведения всех написанных на доске чисел, так что последнее оставшееся число будет равно произведению всех имеющихся вначале чисел.

Закон сохранения импульса

1. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{m_1 v_1}{\sqrt{\left(m_2 v_2\right)^2 + \left(m_3 v_3\right)^2}} = \dfrac{6}{5}$, $\alpha \approx 50°$.

2. $u = \dfrac{5}{6}v = 5$ м/с; $\Delta W = \dfrac{m}{2}\left(\dfrac{5}{6}v^2 + g^2t^2\right) = 63$ Дж.

3. 1) $v_1 = \sqrt{2g(H-h)}$; 2) $v_2 = \sqrt{\dfrac{8g(H-h)}{5}}$.

Институт естественных наук и экологии при «Курчатовском институте»

МАТЕМАТИКА

1. $x_1 = a^{b^2/4}$, $x_2 = a^{4/b^2}$ при $b > 2$; $x = a$ при $b = 2$; $a > 0$, $a \neq 1$.

2. При $p < 0$ решений нет; $\alpha = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, при $p = 0$;

$$-\arccos\frac{\sqrt{1+8p}-1}{4p} + 2\pi n \le \alpha \le \arccos\frac{\sqrt{1+8p}-1}{4p} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z},$$

при $p > 0$; при $p \ge 1$ в дополнение к предыдущим решениям появляются еще решения

$$\pi - \arccos\frac{\sqrt{1+8p}+1}{4p} + 2\pi m \le \alpha \le \pi + \arccos\frac{\sqrt{1+8p}+1}{4p} + 2\pi m,$$
$$m \in \mathbf{Z}.$$

3. $y = x^2 + 2x + 11$ и $y = -x^2 - 4x - 18$; $S = 57\frac{1}{6}$.

4. Минимальное значение равно –4 и достигается при $x = -2$, $y = -2$; максимальное равно $8\sqrt{3}$ и достигается при $x = 4/\sqrt{3}$, $y = 2\sqrt{3}$ и при $x = 2\sqrt{3}$, $y = 4/\sqrt{3}$.