1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Рис.5

вательность кубов натуральных чисел.

Не нарушая принципиального построения таблицы Пифагора, ее

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Рис.6

можно расширить вправо и вниз, соблюдая основное условие: каждое число таблицы есть произведение номера строки и номера столбца, в которых оно стоит. На рисунке 7 изображена верхняя часть расширенной таблицы Пифагора, повернутая на 45°. Естественно, все ранее сформулированные свойства таблицы Пифагора остаются верными и для расширенной таблицы, поэтому в дальнейшем расширенную таблицу также будем называть таблицей Пифагора.

Рассмотрим колонки чисел, расположенных параллельно биссектрисе «числового угла» (рис.8). На самой биссектрисе расположе-

1
2 2
3 4 3
4 6 6 4
5 8 9 8 5
6 10 12 12 10 6
7 12 15 16 15 12 7
8 14 18 20 20 18 14 8
9 16 21 24 25 24 21 16 9
10 18 24 28 30 30 28 24 18 10
11 20 27 32 35 36 35 32 27 20 11

Рис.7

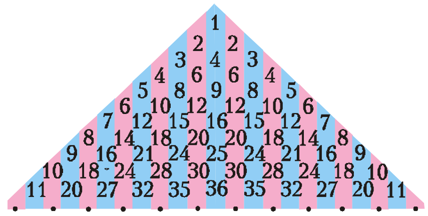

Рис.8

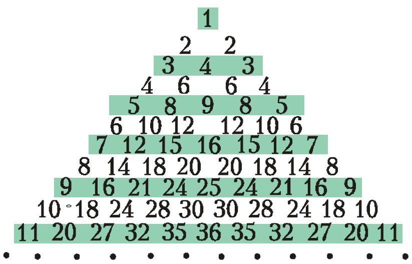

Рис.9

на последовательность квадратных чисел, а параллельно и рядом с ней расположены удвоенные треугольные числа. (Напомним, что треугольными называют числа, показывающие, из скольких кругов можно сложить треугольник: 1, 3, 6, 10, 15, …, $\frac{n(n+1)}{2}$, …). Во всех красных колонках расположены числовые последовательности, связанные с треугольными числами, а в синих колонках – с квадратными числами. Попробуйте установить эту связь самостоятельно.

Группы чисел 1; 2,2; 3,4,3; 4,6,6,4; … назовем *строками расширенной таблицы Пифагора* (рис.9). Произведение чисел n-й строки равно $(n!)^2$, потому что числа этой строки можно представить в таком виде: $1n$, $2(n-1)$, $3(n-2)$, …, $(n-2)3$, $(n-1)2$, $n1$, а произведение таких чисел равно $(n!)^2$.

Сумма чисел n-й строки таблицы Пифагора равна n-му тетраэдральному числу и может быть вычислена по формуле $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. (Тетраэдральными числами называют числа, показывающие, из скольких шаров можно сложить треугольную пирамиду.) На рисунке 10 показан процесс рождения тетраэдрального числа из чисел 5-й строки.

Сумма же всех чисел n первых строк таблицы равна n-му гипертетраэдральному числу $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$ (аналог треугольных чисел для пространства четырех измерений).

Как вы уже успели, наверное, заметить, в свойствах этой таблицы тесно переплетаются треугольные и квадратные числа. Вот еще одно свойство: разность между суммами n-й и $(n-1)$-й строк таблицы равна n-му треугольному числу, а разность между суммами n-й и $(n-2)$-й строк равна n-му квадратному числу.

Умножение в шутку и всерьез

1. Сколько будет: два десятка умножить на три десятка?

2. Одно яйцо варят три минуты. Сколько минут надо варить 5 яиц?

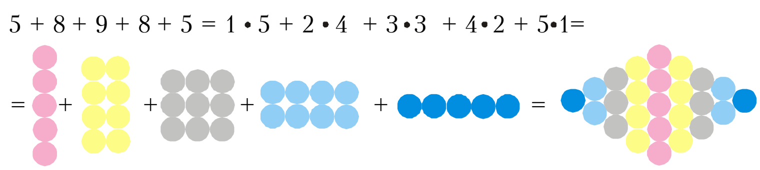

Рис.10

3. На доске написано несколько плюсов и минусов. Разрешается стирать любые два знака, записывая вместо одинаковых знаков плюс, а вместо разных – минус. Зависит ли последний оставшийся на доске знак от того, в каком порядке стирать знаки?

Н.Авилов